البكالوريا بين يديك

محمد صابور

BAC

الهندسة في البكالوريا

100 تمرين تطبيقي

البرنامج الجديد

Scanned by: Mekkaoui Ayoub
Email: ayoubsoft2011@hotmail.fr

شُكر واجب...

إلى أمينة مكتبة " ثانوية الشيخ بوعمامة"
شُكراً لصبركِ على طلباتي التي لا تنتهي..
شُكراً لأنّكِ لم ترمي البطاقة في وجهي!
شُكراً على تلك الاستثناءات..

أيوب.

3992

محمد صابور

الهندسة في البكالوريا

100 تمرين تطبيقي

الشعب : علوم تجريبية - رياضيات – تقني رياضي

البـرنـامـج الـجديد

جميع الحقوق محفوظة للمؤلف

رقم الإيداع القانوني : 2008 - 3923

ردمك: 978-9947-0-2443-0 ISBN :

Mekkaoui Ayoub
Email: ayoubsoft2011@hotmail.fr

دار المفيد للنشر و التوزيع –عين مليلة–

032 – 45 – 10 – 11

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف المرسلين سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم .

أما بعد أخي القارئ أقدم إليك كتابا جديدا عنوانه **الهندسة في البكالوريا** يضاف في سلسلة البكالوريا بين يديك يحتوي هذا الكتاب 100 تمرين تطبيقي منها المحلولة حلا مفصلا ومنها المقترحة للحل.

إن التمارين الموجودة في هذا الكتيب ستساعد الطلبة على اجتياز كل الصعوبات التي يتلقونها في محور **الهندسة** و خاصة **الهندسة الفضائية** .

وأخيرا أتمنى لكل القراء من طلبتنا الأعزاء التوفيق كما أرجو من زملائي أساتذة الرياضيات أن يمدوني بملاحظتهم البناءة لتحسين محتوى هذا الكتيب .

كما أشكر شكرا جزيلا كل من ساهم من بعيد أو قريب في انجاز هذا العمل المتواضع .

محمد صابور

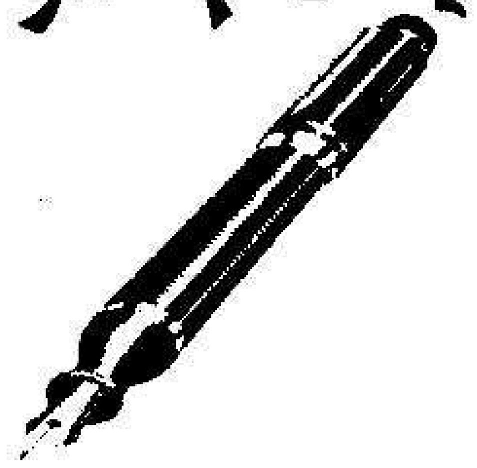
الإهـداء

أهدي هذا العمل المتواضع إلى :

- والدي الكريمين

- رجال التعليم المخلصين في عملهم

-أبنائي الطلبة متمنيا لهم التوفيق في البكالوريا



. محمدصابور

التحويلات النقطية

▪ تذكير حول التحويلات النقطية المألوفة:

1) الانسحاب

تعريف: الانسحاب الذي شعاعه $\vec{U}$ هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث: $\overrightarrow{MM'} = \vec{U}$.

- الخاصية المميزة: صورة ثنائية $(A;B)$ بالانسحاب هي الثنائية $(A';B')$ التي تحقق : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

- العبارة التحليلية للانسحاب:

$\vec{U}(x_0;y_0)$ شعاع من المستوي . $M(x;y)$ نقطة من المستوي صورتها بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{U}$ هي النقطة $M'(x';y')$.

العبارة التحليلية للانسحاب المذكور هي: $\begin{cases} x' = x_0 + x \\ y' = y_0 + y \end{cases}$

2) التحاكي

تعريف: ϖ نقطة من المستوي . k عدد حقيقي غير معدوم . نسمي تحاكي مركزه ϖ و نسبته k كل تحويل نقطي يرفق بكل نقطة $M(x;y)$ النقطة $M'(x';y')$ بحيث:

$\overrightarrow{\varpi M'} = k\,\overrightarrow{\varpi M}$ مع $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

الخاصية المميزة: صورة ثنائية $(A;B)$ بالتحاكي هي الثنائية $(A';B')$ التي تحقق : $\overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{AB}$.

- العبارة التحليلية للتحاكي:

$\varpi(a;b)$ نقطة من المستوي . k عدد حقيق غير معدوم.

في مستو مزود بمعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$ ، العبارة التحليلية للتحاكي الذي مركزه ϖ و نسبته k هي:

$$\begin{cases} x' = kx + a(1-k) \\ y' = ky + b(1-k) \end{cases}$$

.

3) الدوران

تعريف: الدوران الذي مركزه ϖ و زاويته θ هو التحويل النقطي الذي يرفق ϖ بنفسها و يرفق بكل نقطة M تختلف عن ϖ النقطة M' حيث: $\varpi M' = \varpi M$ و $(\overrightarrow{\varpi M};\overrightarrow{\varpi M'}) = \theta$

الخاصية المميزة: صورة كل ثنائية $(A;B)$ بالدوران الذي مركزه ϖ و زاويته θ هي الثنائية $(A';B')$ التي تحقق : $AB = A'B'$.

- العبارة التحليلية للدوران:

العبارة التحليلية للدوران الذي مركزه ϖ و زاويته θ هي:

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

* الأعداد المركبة و التحويلات النقطية

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

f تحويل نقطي من المستوي المركب و الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z' = az + b$

1) **الحالة الأولى:** $a = 1$

في هذه الحالة لدينا: $z' = z + b$ و التحويل النقطي f هو انسحاب شعاعه $\vec{U}$ لاحقته b . مثلا: $z' = z + (2-i)$ هو انسحاب شعاعه $\vec{U}$ صورة العدد المركب $(2-i)$.

2) **الحالة الثانية:** $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

في هذه الحالة لدينا: $z' = az + b$ و يكون التحويل النقطي f تحاكي مركزه النقطة الصامدة ϖ ذات اللاحقة $\frac{b}{1-a}$ و نسبته a .

3) **الحالة الثالثة:** $a \in \mathbb{C}$ و $|a| = 1$

في هذه الحالة لدينا: $z' = az + b$ و يكون التحويل النقطي f دوران مركزه النقطة الصامدة ϖ ذات اللاحقة $\frac{b}{1-a}$ و زاويته $\arg(a)$.

4) التشابه المباشر في المستوي

تعريف:

ليكن k عدد حقيقي موجب تماما . التشابه المباشر الذي نسبته k هو التحويل النقطي S بحيث من أجل كل نقط

A ، B ، M من المستوي صورها A' ، B' ، M' على الترتيب بالتحويل S فإن:

$$\overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{AB} \quad \text{و} \quad \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}\right) = \left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'M'}\right)$$

خواص:

1)التشابه المباشر يحافظ على نسب المسافات وعلى الزوايا الموجهة .

2) التشابه المباشر يضرب المسافات في عدد حقيقي موجب k يسمى نسبة التشابه .

***التعبيرعن تشابه مباشر بالأعداد المركبة**

> **خاصية : في المستوي المركب ، كل تشابه مباشر له عبارة مركبة من الشكل: $z' = az + b$ حيث: a و b عددان مركبان و $a \neq 0$**

*** الشكل الأسي للتشابه المباشر :**

التشابه المباشر مركزه ϖ ذو اللاحقة z_0 و زاويته θ و نسبته k

يكتب على الشكل الأسي كما يلي: $z' - z_0 = Ke^{i\theta}\left(z - z_0\right)$

***خواص التشابه المباشر:**

- تركيب تشابهين مباشرين هو تشابه نسبته جداء النسبتين و زاويته مجموع الزاويتين.
- إذا كان S تشابه مباشر مركزه ϖ و زاويته θ و نسبته k فإن : $S = h \circ r = r \circ h$ حيث h هو التحاكي الذي مركزه ϖ و نسبته k و r هو الدوران الذي مركزه ϖ وزاويته θ.

تمارين محلولة

تمرين01

في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ نعتبرالتحويل النقطي f الذي يرفق بكل نقطة $M\left(x;y\right)$ النقطة $M'\left(x';y'\right)$

حيث :
$$\begin{cases} x' = \sqrt{3}x + y - 3 \\ y' = x - \sqrt{3}y + 3 \end{cases}$$

1) ليكن z لاحقة النقطة M و z' لاحقة النقطة M' .

أوجد علاقة بسيطة بين z' و $\bar{z}$ ($\bar{z}$ هو مرافق z) .

2) برهن بأن مهما تكون النقطتين A و B وصورتهما A' و B' فإن $\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$. 3) برهن بأن f يقبل نقطة صامدة وحيدة ϖ يطلب تعيينها . 4) C نقطة من المستوي لاحقتها $\left(\sqrt{3}+i\right)$.

عين لاحقة C' صورة C بالتحويل f .

تمرين02

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس . نعتبر النقطتين A و B لاحقتاهما $z_1 = i$ و $z_2 = -1 + 2i$ على الترتيب .

1) برهن على وجود تشابه مباشر S نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\pi/4$ و $S\left(A\right) = B$. عين لاحقة ϖ مركز التشابه S .

2) عين لاحقة النقطة D التي صورتها النقطة C ذات اللاحقة $3i$.

3- أ) عين العبارة التحليلية للتشابه S .

ب) عين معادلة صورة الدائرة التي مركزها O (مبدأ المعلم) ونصف قطرها $1cm$ بالتشابه S .

تمرين03

في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر النقاط M_0 , M_1 , M_2 لواحقها على الترتيب : $1+5i$, $1+i$, $-1-i$.

1- أ) عين العبارة المركبة للتشابه S بحيث : $S(M_0)=M_1$ و $S(M_1)=M_2$. ب) عين العناصر المميزة للتشابه S.

2) عين إحداثيتي النقطتين M_3 و M_4 حيث : $S(M_2)=M_3$ و $S(M_3)=M_4$. 3) نعتبر التحويل $S''=S\circ S\circ ...\circ S$ تركيب n مرة S . أ)ما طبيعة التحويل S'' وما هي عناصره المميزة ؟. ب) حدد قيم العدد الطبيعي n من أجلها يكون S'' تحاكي .

تمرين04

$(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس مباشر للمستوي .

ليكن التحويل S الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=(1+i)z+3i$.

1) عين طبيعة التحويل S و عناصره المميزة .

2)نعتبر الدوران r الذي مركزه النقطة O (مبدأ المعلم) و زاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. نضع $f=r\circ S$.

أ) عين طبيعة التحويل f و عناصره المميزة.

ب)عين لاحقة صورة النقطة A ذات اللاحقة (-3) بالتحويل f .

جـ) عين صورة المستقيم (D) ذو المعادلة $x-y+1=0$ بالتحويل f

تمرين05

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

$\varpi(2;1)$ نقطة من المستوي ، S تشابه مباشر مركزه ϖ و نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$. (D) المستقيم ذو المعادلة $2x-2y+1=0$ ،

$M(x;y)$ نقطة من المستوي صورتها بالتشابه S هي $M'(x';y')$

1) أعط الكتابة المركبة للتشابه S .

2) نضع $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$. أكتب x' و y' بدلالة x و y .

3)استنتج معادلة (D') صورة المستقيم (D) بالتشابه S .

4) نعتبر التحاكي الذي مركزه ϖ ونسبته 2 .

أ – أعط العبارة المركبة للتحاكي h .

ب – عين طبيعة التحويل $S\circ h$ و حدد عناصره المميزة.

تمرين06

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(x;y)$ النقطة $M'(x';y')$ حيث:

$$\begin{cases} x' = \frac{-4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{6}{5} \\ y' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{2}{5} \end{cases}$$

1) أثبت أن مجموعة النقط الصامدة بالتحويل f هي مستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلته. 2) أثبت أن الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ يوازي شعاعا ثابتا.

3) أثبت أن منتصف $[MM']$ ينتمي إلى (Δ) ، ثم عين طبيعة التحويل f .

4) عين إحداثيتي النقطة A' صورة النقطة $A(-5;10)$ بالتحويل f .

تمرين07

1)من بين الأجوبة الثلاثة يوجد واحد منهم صحيح . عين الجواب الصحيح .

العبارة المركبة للتشابه المباشر الذي نسبته $\sqrt{2}$ و مركزه النقطة $\varpi(1;0)$ و زاويته $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ هي: أ) $z'=(1+i)z+1-i$.

ب) $z'=(1-i)z+1-i$. جـ) $z'=(1-i)z+i$.

2) في كل حالة من الحالات الآتية ، بين فيما إذا كان التحويل الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' تشابه مباشر ثم عين عناصره المميزة.

أ) $z'=(1+i)z+i$ ، ب) $z'=(1+\sqrt{3})\bar{z}$

جـ) $z'=2z+1-i$ ، د) $z'=(1-\sqrt{3})z+1$

هـ) $z'=z+2i-1$ ، و) $z'=z\left(\frac{1+i}{1-i}\right)z+i$

تمرين08

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

نعتبر النقط A ، B ، C التي لواحقها على الترتيب : $z_A=2i$ ، $z_B=-1+i$ ، $z_C=-3-i$.

1) عين صورة النقطة O بالدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB .

2-ا) أكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_B}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري ثم الشكل المثلثي

ب – ماذا نستنتج بالنسبة للنقط A ، B ، C .

جـ - عين المركز و النسبة للتحاكي h الذي يحول النقطة A إلى B و يحول B إلى C .

تمرين09

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

m عدد مركب . I) نعتبر التحويل النقطي T_m من المستوي في نفسه و الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ بحيث $z'=(m+i)z+m-1-i$. 1) عين m حتى يكون T_m انسحابا

2) بوضع $m=a+bi$ ، أوجد العلاقة بين a ، b كي يكون التحويل T_m دوران . II) في ما يأتي نأخذ $m=1$

1) ا- احسب لاحقة النقطة الصامدة ϖ للتحويل T_1 .

ب – برهن أن T_1 هو تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة.

جـ - برهن أنه من أجل كل عدد مركب z لدينا: $z'-z=i(z-1)$ ، ثم استنتج أنه إذا كانت M تختلف عن ϖ فإن المثلث $\varpi MM'$ قائم في M .

تمرين10

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.نعتبر التحويل T_α الذي يرفق بكل نقطة $M(x;y)$ النقطة $M'(x';y')$

حيث: $\begin{cases} x' = 2\alpha x - \alpha \\ y' = (\alpha-1)x+(\alpha+1)y+\alpha-2 \end{cases}$ مع $\alpha \in \mathbb{R}$

1) ناقش حسب قيم α مجموعة النقط الصامدة للتحويل T_α .

2) برهن أن T_1 $(\alpha=1)$ هو تحاكي يطلب تعيين مركزه و نسبته.

3) نعتبر الدوران r الذي مركزه $\varpi(1;1)$ و زاويته $\pi/3$.

- عين طبيعة التحويل S حيث: $S = T_1 \circ r$ و حدد عناصره المميزة.

4) <u>للتذكير</u>: نعبر عن التشابه S الذي زاويته θ و نسبته k و مركزه ϖ ذات اللاحقة z_ϖ بـ : $z' - z_\varpi = ke^{i\theta}(z - z_\varpi)$. باستعمال هذه العلاقة عين العبارة المركبة والعبارة التحليلية للتشابه S .

تمرين 11

نعتبر التحويلين النقطيين S و h اللذان يرفقان بكل نقطة $M(x;y)$ النقطة $M'(x';y')$ حيث :

$$h:\begin{cases} x' = 2\left(x-\frac{1}{2}\right) \\ y' = 2(y-1) \end{cases} \quad ، \quad S:\begin{cases} x' = -x-\sqrt{3}y+\sqrt{3} \\ y' = \sqrt{3}x-y+2 \end{cases}$$

1) عين مجموعة النقط الصامدة لكل من التحويلين S ، h .

2) بوضع $z = x+iy$ و $z' = x'+iy'$.

أ ـ أكتب العبارة المركبة للتحويلين S ، h .

ب- استنتج طبيعة و العناصر المميزة للتحويلين S ، h .

3) A ، B ، C ، D نقط من المستوي و A' ، B' ، C' ، D' صورها بالتحويل S .

أ) بين أن $A'B' = 2AB$. ب - $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$.

4) عين مركز و نصف قطر الدائرة (C') صورة الدائرة (C) التي مركزها $(0;1)$ و نصف قطرها $3cm$ بالتحويل h .

تمرين 12

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب : $z_A = i$ ، $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

1) r هو الدوران الذي مركزه النقطة O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$.

نسمي C صورة النقطة B بواسطة الدوران r .

أ ـ عين الكتابة المركبة للدوران r . ب- عين z_C لاحقة النقطة C

2) D مرجح الجملة $\{(C;+2),(B;2),(A;-1)\}$.

أ- احسب z_D لاحقة النقطة D .

ب) بين أن النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى نفس الدائرة.

3) h هو التحاكي الذي مركزه A و نسبته 2 .

نسمي E صورة النقطة D بالتحاكي h .

أ- عين الكتابة المركبة لـ h . ب ـ عين z_E لاحقة E .

جـ -عين العبارة المركبة للتحويل $h \circ r$ وحدد عناصره المميزة .

تمرين 13

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

نعتبر التحويل f_λ الذي يرفق بكل نقطة $M(x;y)$ ذات اللاحقة z النقطة $M'(x';y')$ ذات اللاحقة z' حيث: $\begin{cases} x'=\lambda x-\lambda\sqrt{3}y \\ y'=\lambda\sqrt{3}x+\lambda y \end{cases}$

مع $\lambda \in \mathbb{R}^*$. 1) عين مجموعة النقط الصامدة للتحويل f_λ .

2) أوجد العلاقة بين z و z' .

3) ناقش حسب قيم λ طبيعة التحويل f_λ و عين عناصره المميزة.

4) عين طبيعة التحويل $S=f_1\circ f_1$ و عناصره المميزة.

تمرين 14

1) برهن أن عبارة التشابه المباشر الذي مركزه النقطة ϖ لاحقتها z_0 و نسبته k $(k>0)$ و زاويته θ و الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي: $z'-z_0=ke^{i\theta}(z-z_0)$

2) باستعمال القاعدة السابقة :

أ- استنتج طبيعة و العناصر المميزة للتحويل S المعرف بـ:

$z'-(1+i)=2e^{i\frac{\pi}{4}}(z-1-i)$.

ب –عين لاحقة النقطة B صورة النقطة A ذات اللاحقة $2i$ بالتشابه S الذي زاويته $\frac{\pi}{3}$ و نسبته 2 و مركزه النقطة ذات اللاحقة $1+2i$.

تمرين 15

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

A ، B ، C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : $z_A=i$ ، $z_B=1-i$ ، $z_C=-1$.

1) نعتبر التحويل S المعرف بـ: $z'=2e^{i\frac{\pi}{3}}z+1-i$.

أ- أعط الشكل الجبري للعدد المركب $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، و استنتج الكتابة المركبة للتحويل S .

ب- ما طبيعة التحويل S و عناصره المميزة؟

2) أ -عين لواحق النقط A' ، B' ، C' صور النقط A ، B ، C بالتحويل S .

ب- بين أن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان.

3) لتكن G مرجع الجملة $\{(C;-2),(B;1),(A;3)\}$

أ- عين إحداثيتي النقطة G .

ب- عين لاحقة G' مرجع الجملة $\{(C';-2),(B';1),(A';3)\}$

جـ - عين $z_{G'}$ حيث: $G'=S(G)$. ماذا تستنتج؟

4) نعتبر التحويل T الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث: $\overrightarrow{MM'}=3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$. بين أن $\overrightarrow{GM'}=-\overrightarrow{GM}$ ، ثم استنتج طبيعة التحويل T و عناصره المميزة.

حلـول التمـاريـن

حل التمرين1

1) $z' = x' + iy' = \sqrt{3}x + y - 3 + i\left(x - \sqrt{3}y + 3\right) =$

$$= \sqrt{3}x + y - 3 + ix - i\sqrt{3}y + 3i =$$

$$= \sqrt{3}\left(x - iy\right) - i^2 y + ix - 3 + 3i =$$

$$= \sqrt{3}\left(x - iy\right) + i\left(x - iy\right) - 3 + 3i =$$

$$= \left(\sqrt{3} + i\right)\left(x - iy\right) - 3 + 3i = \left(\sqrt{3} + i\right)\bar{z} - 3 + 3i$$

إذن : $z' = \left(\sqrt{3} + i\right)\bar{z} - 3 + 3i$.

2) إذا كان b', a', b, a هي لواحق النقط $B', A', B, A,$ فإن :

$$\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\| = \left|b' - a'\right| = \left|\left(\sqrt{3} + i\right)\left(\bar{b} - \bar{a}\right)\right| = \left|\sqrt{3} + i\right| \times \left|\bar{b} - \bar{a}\right|$$

نعلم أن : $\overline{b - a} = \bar{b} - \bar{a}$ ومنه : $\left|\bar{b} - \bar{a}\right| = \left|\overline{b - a}\right| = \left|b - a\right|$.

($\overline{b - a}$ هو مرافق العدد المركب $b - a$ ونعلم أن عددين مركبين مرافقين لهما نفس الطويلة .) .

$\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\| = \left|\sqrt{3} + i\right| \times \left|b - a\right| = 2 \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$. إذن مهما تكن النقطتين B, A وصورتهما B', A' فإن : $\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\| = 2 \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

3) النقطة $\varpi\left(x; y\right)$ هي نقطة صامدة بالتحويل f يعني :

$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \sqrt{3}x + y - 3 = x \\ x - \sqrt{3}y + 3 = y \end{cases}$ يكافئ

$\begin{cases} \left(\sqrt{3} - 1\right)x + y = 3 \\ x - \left(\sqrt{3} + 1\right)y = -3 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$.

إذن النقطة الصامدة للتحويل f هي $\varpi\left(\sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$.

4) نعلم أن صورة النقطة ذات اللاحقة z هي النقطة لاحقتها z' حيث : $z' = \left(\sqrt{3} + i\right)\bar{z} - 3 + 3i$. ومنه :

$$z'_{C'} = \left(\sqrt{3} + i\right)\bar{z}_C - 3 + 3i = \left(\sqrt{3} + i\right)\left(\sqrt{3} - i\right) - 3 + 3i =$$

$$= 4 - 3 + 3i = 1 + 3i$$

حل التمرين2

1) نعلم أن العبارة المركبة للتشابه هي من الشكل : $z' = az + b$

حيث $|a|$ هي نسبة التشابه و $\arg\left(a\right)$ هي زويته ، ومنه :

$a = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i$.

لدينا $S\left(A\right) = B$ يعني : $z_B = \left(1 + i\right)z_A + b$ ومنه:

$b = z_B - \left(1 + i\right)z_A = \left(-1 + 2i\right) - \left(1 + i\right)i = i$.

إذن يوجد تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$ وزويته $\frac{\pi}{4}$ ويحول النقطة A إلى النقطة B وعبارته المركبة هي : $z' = \left(1 + i\right)z + i$

نعلم أن z_ϖ هي معرفة بـ $z_\varpi = (1+i)z_\varpi + i$ ومنه $z_\varpi = -1$

2) النقطة C صورة النقطة D بالتشابه S يعني $S(D) = C$

ومنه $z_C = (1+i)z_D + i$ ومنه $z_D = \frac{z_C - i}{1+i} = \frac{2i}{1+i} = 1+i$.

3-أ) بوضع $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$ فإن :

$$x' + iy' = (1+i)(x+iy) + i = (x-y) + i(x+y+1)$$

ومنه : $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$ ⊕ وهي العبارة التحليلية للتشابه S .

ب) نعلم أن معادلة الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $1cm$ هي : $x^2 + y^2 = 1$ $(*)$. من الجملة السابقة ⊕ نستنتج أن :

$x = \frac{1}{2}(x' + y' - 1)$ و $y = \frac{1}{2}(-x' + y' - 1)$ وبتعويض في المعادلة $(*)$ نجد : $\frac{1}{4}(x' + y' - 1)^2 + \frac{1}{4}(-x' + y' - 1)^2 = 1$

وبعد النشر والتبسيط للمعادلة نجد : $x'^2 + y'^2 - 2y' = 1$.

إذن معادلة صورة الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $1cm$ بالتشابه S هي : $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$.

حل التمرين3

1- أ) نعلم أن العبارة المركبة للتشابه S هي من الشكل: $z' = az + b$ حيث a و b عددين مركبين .

$S(M_0) = M_1$ يعني $1 + i = a(1+5i) + b$

$S(M_1) = M_2$ يعني $-1 - i = a(1+i) + b$

إذن لدينا الجملة : $\begin{cases} a(1+5i) + b = 1 + i \\ a(1+i) + b = -1 - i \end{cases}$

بالطرح طرفا من طرف نجد : $2ai = 1 + i$ ومنه :

$a = \frac{1+i}{2i} = \frac{(1+i)(-i)}{2} = \frac{1}{2}(1-i)$. وبتعويض في إحدى المعادلتين للجملة نجد : $b = -2 - i$.

إذن العبارة المركبة للتشابه S هي : $z' = \frac{1}{2}(1-i)z + (-2-i)$

ب) العناصر المميزة للتشابه S هي : - النسبة : $\left|\frac{1}{2}(1-i)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- الزاوية : $\arg\left(\frac{1}{2}(1-i)\right) = -\frac{\pi}{4}$.

- المركز : هي النقطة الصامدة ϖ لاحقتها z_ϖ

حيث: $z_\varpi = \frac{1}{2}(1-i)z_\varpi - 2 - i$ ومنه $z_\varpi = -3 + i$.

2) $S(M_2) = M_3$ يعني :

$z_{M_3} = \frac{1}{2}(1-i)(-1-i) - 2 - i = -3 - i$.

$S(M_3) = M_4$ يعني :

$z_{M_4} = \frac{1}{2}(1-i)(-3-i) - 2 - i = -4$.

3- أ) التحويل $S'' = S \circ S \circ ... S$ مركب من n تشابه مباشر لها نفس المركز ϖ فهو تشابه مركزه ϖ ونسبته هي :

ب) يكون التحويل $-n\times \frac{\pi}{4}$ وزاويته تساوي $\left(\sqrt{2}/2\right)^n$

S^n تحاكي إذا كان $-\frac{n\pi}{4}=k\pi$ ومنه $n=-4k$ $\left(k\in\mathbb{Z}^-\right)$

حل التمرين4

1) $z'=(1+i)z+3i$ هي الكتابة المركبة للتشابه S الذي نسبته تساوي $|1+i|=\sqrt{2}$ وزاويته $\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$ ومركزه النقطة الصامدة ϖ ذات اللاحقة : -3 = $z_{\varpi}=\frac{3i}{1-(1+i)}=\frac{3i}{-i}=-3$.

2- أ) التحويل $f=r\circ S$ يعتبر تركيب تشابهين مباشرين لأن الدوران r هو تشابه نسبته 1 . إذن التحويل f مركب من تشابهين فهو تشابه نسبته جداء النسبتين $1\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$ وزاويته مجموع الزاويتين : $\frac{\pi}{4}+\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$ ومركزه النقطة الصامدة Ω للتحويل f . لتعيين النقطة Ω نجد العبارة المركبة للتحويل f .

لدينا $f=r\circ S$ حيث r هو الدوران الذي مركزه O (مبدأ المعلم) وزاويته $\left(-\pi/2\right)$ وتكون عبارته المركبة هي : $z'=-iz$

$(r\circ S)(M)=r\left[S(M)\right]=r(M_1)=M'$.

$r(M_1)=M'$ يعني $z_{M'}=-i\times z_{M_1}$

$S(M)=M_1$ يعني $z_{M_1}=(1+i)z+3i$

ومنه : $z_{M'}=-iz_{M_1}=-i\left[(1+i)z+3i\right]=(1-i)z+3$

إذن العبارة المركبة للتحويل f هي : $z'=(1-i)z+3$.

لاحقة النقطة الصامدة للتحويل f هي معرفة بـ :

$z_{\Omega}=(1-i)z_{\Omega}+3$ ومنه $z_{\Omega}=-3i$.

ب) $f(A)=A'$ يعني :

$z_{A'}=(1-i)z_A+3=(1-i)(-3)+3=3i$.

جـ) بوضع $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$ وبالتعويض في العبارة المركبة للتحويل f نجد العبارة التحليلية لـ f .

$$x'+y'=(1-i)(x+iy)+3=(x+y+3)+i(-x+y)$$

ومنه : $\begin{cases}x'=x+y+3\\ y'=-x+y\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}x=\frac{1}{2}(x'-y'-3)\\ y=\frac{1}{2}(x'+y'-3)\end{cases}$

وبتعويض x و y بدلالة x' و y' في معادلة المستقيم (D) نجد معادلة المستقيم (D') صورة المستقيم (D) بالتحويل f :

$\frac{1}{2}(x'-y'-3)-\frac{1}{2}(x'+y'-3)+1=0$ ومنه

$-y'+1=0$ ومنه $y'=1$. إذن معادلة (D') هي $y=1$.

حل التمرين5

1) العبارة المركبة للتشابه S هي من الشكل $z'=az+b$

لدينا : $a=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+i$. نعلم أن :

$z_\varpi = \dfrac{b}{1-a}$ ومنه $b = z_\varpi(1-a) = (2+i)(-i) = 1-2i$.

إذن العبارة المركبة للتشابه S هي : $z' = (1+i)z + 1 - 2i$.

2) $z' = x' + iy' = (1+i)(x+iy) + 1 - 2i =$

$$= (x - y + 1) + i(x + y - 2)$$

ومنه $\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y - 2 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x' + y' + 1) \\ y = \frac{1}{2}(-x' + y' + 3) \end{cases}$

3) بالتعويض في معادلة المستقيم (D) نجد معادلة المستقيم (D')

$$2 \times \tfrac{1}{2}(x' + y' + 1) - 2 \times \tfrac{1}{2}(-x' + y' + 3) + 1 = 2x' - 1 = 0$$

إذن معادلة (D') صورة (D) بالتشابه S هي $2x - 1 = 0$.

4- أ) العبارة المركبة للتحاكي h هي على الشكل $z' = az + b$ حيث : $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$. لدينا $a = 2$ ونعلم أن : $z_\varpi = 2z_\varpi + b$ ومنه : $b = -2 - i$ ، إذن العبارة المركبة للتحاكي h هي $z' = 2z - 2 - i$

ب) التحاكي الذي نسبته $k\,(k > 0)$ يعتبر تشابه نسبته k وزاويته 0

إذن التحويل $S \circ h$ هو مركب من تشابهين لهما نفس المركز ϖ فهو تشابه نسبته جداء النسبتين $2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ ومركزه النقطة ϖ وزاويته مجموع الزاويتين $\frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}$.

حل التمرين6

1) $M(x;y)$ نقطة صامدة بالتحويل f يعني $f(M) = M$ ومنه

$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} -\frac{4x}{5} + \frac{3y}{5} - \frac{6}{5} = x \\ \frac{3x}{5} + \frac{4y}{5} + \frac{2}{5} = y \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{9x}{5} - \frac{3y}{5} + \frac{6}{5} = 0 \\ \frac{3x}{5} - \frac{y}{5} + \frac{2}{5} = 0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 3x - y + 2 = 0 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{cases}$

إذن مجموعة النقاط الصامدة للتحويل f هو المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $3x - y + 2 = 0$.

2) $\overrightarrow{MM'} = (x' - x)\vec{i} + (y' - y)\vec{j} =$

$$= \left(-\frac{9x}{5} + \frac{3y}{5} - \frac{6}{5}\right)\vec{i} + \left(\frac{3x}{5} - \frac{y}{5} + \frac{2}{5}\right)\vec{j} =$$

$$= \tfrac{1}{5}(3x - y + 2)(-3\vec{i} + \vec{j}) = k(-3\vec{i} + \vec{j}), (k \in \mathbb{R})$$

بما أن $\overrightarrow{MM'} = k(-3\vec{i} + \vec{j})$ فالشعاع $\overrightarrow{MM'}$ يوازي الشعاع الثابت $\vec{u} = -3\vec{i} + \vec{j}$.

3) ليكن I منتصف القطعة المستقيمة $[MM']$ فإن :

$$x_I = \frac{x' + x}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{6}{5}\right) = \frac{1}{10}(x + 3y - 6)$$

$$y_I = \frac{y' + y}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}x + \frac{9}{5}y + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{10}(3x + 9y + 2)$$

$$3x_I - y_I + 2 = \tfrac{3}{10}(x + 3y - 6) - \tfrac{1}{10}(3x + 9y + 2) + 2 = 0$$

إذن النقطة I منتصف $[MM']$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

التحويل f هو تناظر بالنسبة إلى المستقيم (Δ) وفق منحى الشعاع $\vec{u}=-3\vec{i}+\vec{j}$. 4) إحداثيتي النقطة A' هي :

$$x_{A'} = -\tfrac{4}{5}\times(-5)+\tfrac{3}{5}\times 10-\tfrac{6}{5}=\tfrac{44}{5}$$

$$y_{A'} = \tfrac{3}{5}\times(-5)+\tfrac{4}{5}\times 10+\tfrac{2}{5}=\tfrac{27}{5}$$

حل التمرين7

1) الجواب الصحيح هو رقم (3) أي العبارة المركبة للتشابه S هي $z'=(1-i)z+i$ لأن نسبة التشابه S هي $|1-i|=\sqrt{2}$ وزاويته $\arg(1-i)=-\tfrac{\pi}{4}$ ومركزه ϖ حيث $z_{\varpi}=\dfrac{i}{1-(1-i)}=1$.

2) نعلم أن العبارة من الشكل $z'=az+b$ حيث a عدد مركب طويلته لا تساوي 1 تمثل تشابه مباشر .

التحويل المعرف بـ : $z'=(1+i)z+i$ هو تشابه نسبته $|1+i|=\sqrt{2}$ وزاويته $\arg(1+i)=\tfrac{\pi}{4}$ ومركزه النقطة ϖ ذات اللاحقة $z_{\varpi}=\dfrac{i}{1-(1+i)}=-1$.

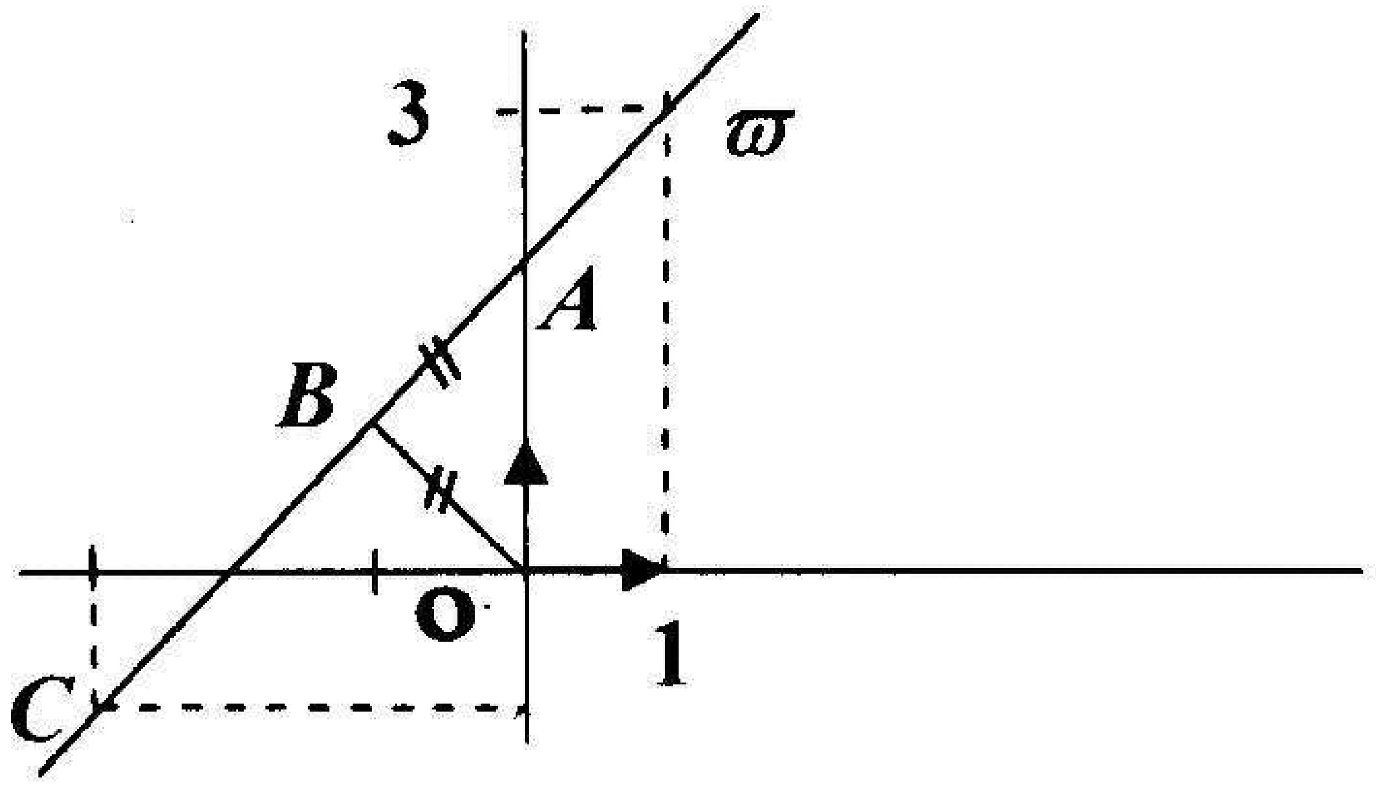
التحويل المعرف بـ : $z'=(1-i\sqrt{3})z+1$ هو تشابه نسبته $|1-i\sqrt{3}|=2$ وزاويته $\arg(1-i\sqrt{3})=-\tfrac{\pi}{3}$ ومركزه ϖ حيث : $z_{\varpi}=-\tfrac{\sqrt{3}}{3}i$.

الكتابة المبسطة للتحويل : $z'=2\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)z+i$ هي $z'=2iz+i$

وهي تمثل تشابه نسبته 2 وزاويته $\arg(i)=\tfrac{\pi}{2}$ ومركزه النقطة ϖ ذات اللاحقة $z_{\varpi}=\dfrac{i}{1-2i}=\dfrac{i(1+2i)}{1+2^2}=-\dfrac{2}{5}+i\dfrac{1}{5}$

حل التمرين8

1) صورة النقطة O بالدوران الذي مركزه B وزاويته $\tfrac{\pi}{2}$ هي النقطة A . يمكن التحقق من هذا باستعمال العبارة المركبة للدوران وهي : $z'=iz+2i$. وتكون صورة النقطة O بالدوران هي النقطة التي لاحقتها $z=i\times 0+2i=2i$ وهي تمثل لاحقة A المثلث OAB هو قائم في B ومتساوي الساقين .



2- أ) $\dfrac{z_C-z_B}{z_B-z_A}=\dfrac{-3-i+1-i}{-1+i-2i}=\dfrac{2(-1-i)}{-1-i}=2$

ويكون الشكل المثلثي هو $\dfrac{z_C-z_B}{z_B-z_A}=2(\cos 0+i\sin 0)$

ب) نعلم أن : $\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}\right) = 0$ ،
إذن النقاط C, B, A هي على استقامة واحدة .

ج) نعلم أن العبارة المركبة للتحاكي هي من الشكل $z' = az + b$ حيث $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$. لدينا $\begin{cases} h(A) = B \\ h(B) = C \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_C = az_B + b \end{cases}$
بالطرح طرفا من طرف نجد : $z_C - z_B = a(z_B - z_A)$ ومنه : $a = \frac{z_C - z_B}{z_B - z_A} = 2$ وبالتعويض في إحدى المعادلتين للجملة السابقة نجد : $b = z_B - 2z_A = -1 + i - 4i = -1 - 3i$ ، ومنه العبارة المركبة للتحاكي هي : $z' = 2z - 1 - 3i$. مركز التحاكي هي النقطة الصامدة ϖ ذات اللاحقة : $z_\varpi = \frac{-1-3i}{1-2} = 1 + 3i$

حل التمرين9

I. 1) يكون التحويل T_m انسحاب إذا كان : $m + i = 1$ ومنه $m = 1 - i$. 2) يكون التحويل T_m دوران إذا كان $|m + i| = 1$ ،
بوضع : $m = a + bi$ فإن $|m + i| = \sqrt{a^2 + (b+1)^2} = 1$ ومنه $a^2 + (b+1)^2 = 1$ ومنه $a^2 + b^2 + 2b = 0$. يكون T_m دوران إذا تحقق ما يلي : $m = a + bi$ و $a^2 + b^2 + 2b = 0$

II. 1- أ) لاحقة النقطة الصامدة ϖ لـ T_1 هي $z_\varpi = \frac{-i}{1-(1+i)} = 1$.

ب) التحويل T_1 هو معرف بالعبارة المركبة $z' = (1+i)z - i$ وهي من الشكل $z' = az + b$ و $|a| = |1+i| = \sqrt{2} \neq 1$ فالتحويل T_1 هو تشابه مباشر مركزه النقطة $\varpi(1;0)$ وزاويته $\arg(1+i) = \pi/4$ ونسبته $|1+i| = \sqrt{2}$. جـ) لدينا $z' = (1+i)z - i$ ومنه $z' = z + i(z-1)$ ومنه $z' - z = i(z-1)$. إذا كان $z \neq 1$ أي : M يختلف عن ϖ فإن : $\frac{z'-z}{z-1} = i$ ونعلم أن $z_\varpi = 1$ ومنه :
$\frac{z'-z}{z-1} = \frac{z'-z}{z-z_\varpi} = i$ ومنه $\frac{z'-z}{z_\varpi - z} = -i$.
نعلم أن $\arg\left(\frac{z'-z}{z_\varpi - z}\right) = \left(\overrightarrow{M\varpi}, \overrightarrow{MM'}\right) = \arg(-i) = -\pi/2$.
إذن المثلث $\varpi MM'$ هو قائم في M .

حل التمرين10

1) M نقطة صامدة بالتحويل T_α معناه : $T_\alpha(M) = M$ يكافئ $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 2\alpha x - \alpha = x \\ (\alpha-1)x + (\alpha+1)y + \alpha - 2 = y \end{cases}$

$$(*)\begin{cases} (2\alpha-1)x - \alpha = 0 \\ (\alpha-1)x + \alpha y + \alpha - 2 = 0 \end{cases}$$

محدد الجملة $(*)$ يساوي $\alpha(2\alpha-1)$.

- إذا كان $\alpha \neq 0$ و $\alpha \neq \frac{1}{2}$ فالجملة (*) تقبل حل وحيد $(x_0 ; y_0)$ ويكون للتحويل T_α في هذه الحالة نقطة صامدة وحيدة $\varpi(x_0 ; y_0)$.

- إذا كان $\alpha = 0$ فالجملة (*) تصبح : $\begin{cases} -x = 0 \\ -x-2=0 \end{cases}$

وهي جملة مستحيلة ، وبالتالي لا توجد أية نقطة صامدة لـ T_α .

- إذا كان $\alpha = \frac{1}{2}$ فالجملة (*) مستحيلة ومنه التحويل T_α ليست له أية نقطة صامدة .

2) من أجل $\alpha = 1$ لدينا T_1 وهو يحول النقطة $M(x;y)$ إلى النقطة $M'(x';y')$ حيث : $\begin{cases} x' = 2x-1 \\ y' = 2y-1 \end{cases}$.

التحويل T_1 يقبل نقطة صامدة وحيدة $\varpi(1;1)$.

$$\overrightarrow{\varpi M'} = (x'-1)\vec{i} + (y'-1)\vec{j} = (2x-2)\vec{i} + (2y-2)\vec{j} =$$
$$= 2\left[(x-1)\vec{i} + (y-1)\vec{j}\right] = 2\overrightarrow{\varpi M}$$

بما أن $\overrightarrow{\varpi M'} = 2\overrightarrow{\varpi M}$ حسب التعريف فالتحويل T_1 هو تحاكي نسبته 2 ومركزه النقطة الصامدة $\varpi(1;1)$.

3) التحويل $S = T_1 \circ r$ هو مركب من دوران مركزه ϖ و زاويته $\frac{\pi}{3}$ والتحاكي T_1 نسبته 2 ومركزه ϖ فهو تشابه (حسب التعريف) مركزه ϖ وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ونسبته2 .

4) نعبر عن التشابه S الذي زاويته $\frac{\pi}{3}$ ونسبته 2 ومركزه ϖ ذات اللاحقة $z_\varpi = 1+i$ بـ : $z'-(1+i) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-1-i)$

$$z'-(1+i) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(z-1-i) =$$
$$= \left(1+i\sqrt{3}\right)(z-1-i) = \left(1+i\sqrt{3}\right)z - 1 + \sqrt{3} - i\left(1+\sqrt{3}\right)$$

ومنه : $z' = \left(1+i\sqrt{3}\right)z + \sqrt{3}(1-i)$ وهي العبارة المركبة للتشابه S . بوضع $z = x+iy$ و $z' = x'+iy'$ وبالتعويض في العبارة المركبة للتشابه S نجد العبارة التحليلية .

$x'+iy' = \left(1+i\sqrt{3}\right)(x+iy) + \sqrt{3}(1-i)$ ومنه :

$x'+iy' = \left(x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}\right) + i\left(x\sqrt{3}+y-\sqrt{3}\right)$ ومنه :

$\begin{cases} x' = x-\sqrt{3}y+\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3}+y-\sqrt{3} \end{cases}$ وهي العبارة التحليلية للتشابه S .

حل التمرين11

1) $M(x;y)$ نقطة صامدة بالتحويل S يعني $S(M)=M$ يكافئ ($x'=x$ و $y'=y$) ومنه :

$\begin{cases} x = -x-\sqrt{3}y+\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3}x-y+2 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 2x+\sqrt{3}y-\sqrt{3} = 0 \quad (1) \\ \sqrt{3}x-2y+2 = 0 \quad (2) \end{cases}$

بضرب المعادلة (1) في $\sqrt{3}$ والمعادلة (2) في (-2) نحصل على

الجملة التالية : $\begin{cases} 2\sqrt{3}x+3y-3=0 & (3) \\ -2\sqrt{3}x+4y-4=0 & (4) \end{cases}$ بجمع (3) و (4)

نجد $7y-7=0$ ومنه $y=1$ وبالتعويض في المعادلة (1) نجد :

$x=0$ ، إذن التحويل S يقبل نقطة صامدة وحيدة $\varpi(0;1)$.

$M(x;y)$ نقطة صامدة بالتحويل h يعني $h(M)=M$ يكافئ

$$\begin{cases} x=2\left(x-\frac{1}{2}\right) \\ y=2(y-1) \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x-1=0 \\ y-2=0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

التحويل h يقبل نقطة صامدة وحيدة $\Omega(1;2)$.

2- أ) العبارة المركبة للتحويل S :

$$z'=x'+iy'=\left(-x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}\right)+i\left(\sqrt{3}x-y+2\right)=$$

$$= -x-iy+\sqrt{3}(ix-y)+\left(\sqrt{3}+2i\right) =$$

$$=-(x+iy)+\sqrt{3}\left(ix+i^2y\right)+\left(\sqrt{3}+2i\right)=$$

$$=-(x+iy)+\sqrt{3}i(x+iy)+\left(\sqrt{3}+2i\right)=$$

$$\left(-1+\sqrt{3}i\right)(x+iy)+\left(\sqrt{3}+2i\right)=\left(-1+\sqrt{3}i\right)z+\left(\sqrt{3}+2i\right)$$

إذن العبارة المركبة لـ S هي : $z'=\left(-1+i\sqrt{3}\right)z+\left(\sqrt{3}+2i\right)$

العبارة المركبة للتحويل h :

$$z'=x'+iy'=2\left(x-\frac{1}{2}\right)+2(y-1)i=2(x+iy)-1-2i$$

العبارة المركبة للتحويل h هي : $z'=2z-1-2i$.

ب) العبارة المركبة للتحويل S تدل على أن S هو تشابه مركزه النقطة الصامدة ϖ ذات اللاحقة $z_{\varpi}=1$ ونسبته $2=\left|-1+i\sqrt{3}\right|$

وزاويته $\arg\left(-1+i\sqrt{3}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

من شكل العبارة المركبة للتحويل h نستنتج أن h هو تحاكي نسبته 2 ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة $1+2i$.

3- أ) لنرمز بـ : a,b,c,d إلى لواحق النقط : A,B,C,D وبـ : a',b',c',d' إلى لواحق النقط : A',B',C',D' .

نعلم أن : $AB=|b-a|$ و $A'B'=|b'-a'|$ ولدينا :

$$a'=\left(-1+\sqrt{3}i\right)a+\sqrt{3}+2i$$

$$b'=\left(-1+\sqrt{3}i\right)b+\sqrt{3}+2i$$

$$A'B'=|b'-a'|=\left|\left(-1+\sqrt{3}i\right)(b-a)\right|=\left|-1+\sqrt{3}i\right|\times|b-a|==2AB$$

ب) بما أن A' و B' هما صورتا النقطتين A و B بالتشابه S الذي نسبته 2 فإن : $A'B'=2AB$ (من خواص التشابه)

و أيضا : $C'D'=2CD$. لدينا $\frac{A'B'}{AB}=\frac{C'D'}{CD}=2$ ومنه $\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{AB}{CD}$.

4) نعلم أن صورة دائرة (C) مركزها ϖ ونصف قطرها r بالتحاكي h الذي نسبته k هي الدائرة (C')

مركزها $\varpi' = h(\varpi)$ ونصف قطرها $r' = |k| \times r$.

إحداثيتي ϖ' هي : $x_{\varpi'} = 2\left(0 - \frac{1}{2}\right) = -1$

$y_{\varpi'} = 2(1-1) = 0$. $r' = 2 \times r = 2 \times 3 = 6$.

مركز الدائرة (C') هي $\varpi'(-1;0)$ ونصف قطرها $r' = 6$.

حل التمرين12

1- أ) الكتابة المركبة للدوران r الذي مركزه النقطة O (مبدأ المعلم) وزاويته θ هي من الشكل : $z' = az$ حيث : $a = \cos\theta + i\sin\theta$.

إذن الكتابة المركبة للدوران r هي

$$z' = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)z = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z .$$

ب) لدينا $r(B) = C$ ومنه : $z_C = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_B$

$$z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z_C = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

2- أ) $$z_D = \frac{-z_A + 2z_B + 2z_C}{-1+2+2} = \frac{-i - \sqrt{3} - i + \sqrt{3} - i}{3} = -i$$

$$OB = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right| = 1 \quad , \quad OC = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right| = 1$$

$$OA = |i| = 1 \quad ، \quad OD = |-i| = 1$$

بما أن : $OA = OB = OC = OD = 1$ فالنقاط : A, B, C, D تنتمي إلى نفس الدائرة مركزها O ونصف قطرها 1 .

3- أ) الكتابة المركبة للتحاكي h الذي نسبته 2 هي من الشكل $z' = 2z + b$ ، وبما أن A هي مركز التحاكي فهي النقطة الصامدة للتحاكي h ومنه $h(A) = A$ يكافئ $z_A = 2z_A + b$ ومنه $b = -z_A = -i$ ، إذن العبارة المركبة للتحاكي h هي $z' = 2z - i$

ب) E صورة النقطة D بالتحاكي h يعني $h(D) = E$ ومنه $z_E = 2z_D - i = -3i$.

جـ) العبارة المركبة للتحويل $h \circ r$

$$M(z) \xrightarrow{r} M_1(z_1) \xrightarrow{h} M'(z') .$$

$M_1 = r(M)$ يعني : $z_1 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

$M' = h(M_1)$ يعني :

$$z' = 2z_1 - i = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - i = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)z - i$$

إذن العبارة المركبة للتحويل $h \circ r$ هي : $z' = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)z - i$

التحويل $h \circ r$ هو تشابه نسبته $\left|-1 + i\sqrt{3}\right| = 2$ وزاويته هي : $\arg\left(-1 + i\sqrt{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$ ومركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة :

$$z_\varpi = \frac{-i}{1 - \left(-1 + i\sqrt{3}\right)} = \frac{-i}{2 - i\sqrt{3}} = \frac{-i\left(2 + i\sqrt{3}\right)}{7} = \frac{\sqrt{3}}{7} - \frac{2}{7}i$$

حل التمرين13

1) $M(x;y)$ نقطة صامدة بالتحويل f_λ يعني $f_\lambda(M)=M$

$$\begin{cases} x'=\lambda x-\lambda\sqrt{3}y=x\\ y'=\lambda\sqrt{3}x+\lambda y=y\end{cases}$$ يكافئ $$(*)\begin{cases}(\lambda-1)x-\lambda\sqrt{3}y=0\\ \lambda\sqrt{3}x+(\lambda-1)y=0\end{cases}$$

الجملة $(*)$ تقبل حل وحيد $(0;0)$.

إذن التحويل f_λ يقبل نقطة صامدة وحيدة $(0;0)$.

2) $z'=x'+iy'=\left(\lambda x-\lambda\sqrt{3}y\right)+i\left(\lambda\sqrt{3}x+\lambda y\right)=$

$$\left(\lambda x+i\lambda y\right)+\lambda\sqrt{3}ix-\lambda\sqrt{3}y=\lambda\left(x+iy\right)+\lambda\sqrt{3}\left(ix-y\right)$$

$$=\lambda\left(x+iy\right)+\lambda\sqrt{3}\left(ix+i^2y\right)=\lambda\left(x+iy\right)+\lambda\sqrt{3}i\left(x+iy\right)$$

$$=\left(\lambda+\lambda\sqrt{3}i\right)\left(x+iy\right)=\lambda\left(1+i\sqrt{3}\right)z$$

3) من أجل كل $\lambda\in\mathbb{R}^*$: $\left|\lambda\left(1+i\sqrt{3}\right)\right|=|\lambda|\left|1+i\sqrt{3}\right|=2|\lambda|$

- إذا كان $\lambda=-\frac{1}{2}$ فإن $2|\lambda|=1$ ويكون التحويل f_λ دوران مركزه $O(0;0)$ وزاويته هي : $\arg\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{4\pi}{3}$

- إذا كان $\lambda=\frac{1}{2}$ فإن $2|\lambda|=1$ ويكون التحويل f_λ دوران مركزه $O(0;0)$ وزاويته هي : $\arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$

- إذا كان $\lambda\in\mathbb{R}^*-\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$ فإن $2|\lambda|\neq 1$ ويكون

التحويل f_λ تشابه مركزه $O(0;0)$ وزاويته هي : $\pi/3$ لما يكون λ عدد حقيقي موجب و $4\pi/3$ لما يكون λ عدد حقيقي سالب .

4) التحويل f_1 هو معرف بعبارته المركبة : $z'=\left(1+i\sqrt{3}\right)z$ وهو تشابه نسبته 2 و مركزه $O(0;0)$ وزاويته $\pi/3$ ، إذن التحويل $S=f_1\circ f_1$ مركب من تشابهين لهما نفس المركز ، فهوتشابه مركزه $O(0;0)$ ونسبته $2^2=4$ وزاويته $2\times\pi/3=2\pi/3$.

حل التمرين14

1) نعلم أن العبارة المركبة للتشابه S الذي نسبته k وزاويته θ ومركزها النقطة ϖ لاحقتها z_0 هي من الشكل : (1) $z'=az+b$

حيث : $a=k(\cos\theta+i\sin\theta)$. بما أن z_0 هي لاحقة النقطة الصامدة ϖ فإن : (2) $z_0=az_0+b$. بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) نجد : $(*)$ $z'-z_0=a(z-z_0)$.

نعلم أن الشكل الأسي للعدد المركب a هو : $a=ke^{i\theta}$ وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد : $z'-z_0=ke^{i\theta}(z-z_0)$.

2- أ) لدينا S معرف بـ : $z'-(1+i)=2e^{i\frac{\pi}{4}}\left[z-(1+i)\right]$.

بالمطابقة مع العلاقة السابقة نلاحظ أن :

$z_0=1+i$ و $k=2$ و $\theta=\pi/4$. إذن التحويل S هو تشابه نسبته 2 ومركزه النقطة ذات اللاحقة $z_0=1+i$ وزاويته $\theta=\pi/4$.

ب) باستعمال القاعدة السابقة للتشابه : $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$

نستطيع أن نعبر عن التشابه S الذي زاويته $\pi/3$ ونسبته 2 ومركزه النقطة ذات اللاحقة $(1+2i)$ بـ :

ومنه : $z' - (1+2i) = 2e^{i\pi/3}(z-1-2i)$

$z' = 2e^{i\pi/3}(z-1-2i)+(1+2i)$. لدينا $S(A)=B$ ومنه

$z_B = 2e^{i\pi/3}(z_A-1-2i)+(1+2i)$. نعلم أن $z_A = 2i$ ،

$e^{i\pi/3} = \cos\pi/3 + i\sin\pi/3 = 1/2 + i\sqrt{3}/2$ ومنه :

$$z_B = 2\left(1/2 + i\sqrt{3}/2\right)\times(-1)+(1+2i) = \left(2-\sqrt{3}\right)i$$

حل التمرين15

أ) $2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1+i\sqrt{3}$

$z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}z+1-i = \left(1+i\sqrt{3}\right)z+1-i$.

ب) التحويل S هو تشابه نسبته $\left|1+i\sqrt{3}\right| = 2$ وزاويته

$\arg\left(1+i\sqrt{3}\right) = \pi/3$ ومركزه النقطة الصامدة ϖ ذات اللاحقة

$$z_\varpi = \frac{1-i}{1-\left(1+i\sqrt{3}\right)} = \frac{1-i}{-i\sqrt{3}} = \frac{(1-i)\times i\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}+i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

2) $A' = S(A)$ يعني $z_{A'} = \left(1+i\sqrt{3}\right)\times i+1-i = -\sqrt{3}+1$

$B' = S(B)$ يعني :

$$z_{B'} = \left(1+i\sqrt{3}\right)\times(1-i)+1-i = \left(2+\sqrt{3}\right)+\left(-2+\sqrt{3}\right)i$$

$C' = S(C)$ يعني :

$$z_{C'} = \left(1+i\sqrt{3}\right)\times(-1)+1-i = \left(-\sqrt{3}-1\right)i$$

ب) بما أن النقط C', B', A' هم صور النقط C, B, A بالتشابه الذي نسبته 2 فإن (من خواص التشابه) :

$A'B' = 2AB$, $B'C' = 2BC$, $A'C' = 2AC$ ومنه

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = 2$ وهذا يعني أن المثلثين ABC و $A'B'C'$ هما متشابهين .

$$z_G = \frac{3z_A+z_B-2z_C}{3+1-2} = \frac{3i+1-i-2(-1)}{2} = \frac{3}{2}+i$$

$$z_{G'} = \frac{3z_{A'}+z_{B'}-2z_{C'}}{3+1-2} =$$

$$= \frac{3\left(-\sqrt{3}+1\right)+\left(2+\sqrt{3}\right)+i\left(-2+\sqrt{3}\right)-2i\left(-\sqrt{3}-1\right)}{2}$$

$$= \frac{5-2\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

جـ) $G' = S(G)$ يعني : $z_{G'} = \left(1+i\sqrt{3}\right)z_G+1-i$ ومنه

$$z_{G'} = \left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\frac{3}{2}+i\right)+1-i = \frac{5-2\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

نلاحظ أن لاحقة G' مرجح الجملة $\{(C',-2),(B',1),(A',3)\}$ هي $z_{G'}$ لاحقة صورة G بالتشابه S وهذا يعني أن التشابه يحافظ على مرجح الجملة . 4) لدينا : $\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$.

بما أن G هو مرجح الجملة $\{(C,-2),(B,1),(A,3)\}$ فإن :

$$\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC} = (3+1-2)\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MG}$$

نعلم أن $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GM'}$ ومنه $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MG}$ يكافئ $\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GM'} = 2\overrightarrow{MG}$ ومنه $\overrightarrow{GM'} = \overrightarrow{MG} = -\overrightarrow{GM}$.

التحويل T يرفق بكل نقطة M النقطة M' بحيث $\overrightarrow{GM'} = -\overrightarrow{GM}$ هو تناظر مركزي مركزه النقطة G.

تمارين مقترحة للحل

تمرين01

I) ليكن f التحويل النقطي من المستوي المركب و الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

. $z' = \left(1+i\sqrt{3}\right)z+\sqrt{3}\,(1-i)$

1) عين لاحقة ϖ النقطة الصامدة بالتحويل f .

2) ما طبيعة التحويل f ؟ 3) برهن أن المثلث $\varpi MM'$ قائم في M .

II) نعتبر التحاكي h الذي مركزه $I(1;0)$ و نسبته (-2) و الدوران r الذي مركزه $B(0;1)$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

- عين العناصر المميزة للتحويلين التاليين: $f = r\circ h$ و $g = h\circ r$

تمرين02

في مستوي الأعداد المركبة المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

نعتبر النقط A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب :

. $z_0 = i$ ، $z_1 = -1+i$ ، $z_2 = 1+2i$

1) أ- برهن على وجود تشابه مباشر مركزه A و يحول B إلى C .

ب – أعط قيس الزاوية و النسبة لهذا التشابه.

2) ليكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي هي مراكز التشابهات المباشرة و التي نسبتها $\sqrt{2}$ و تحول النقطة B إلى C

- عين المجموعة (Γ) .

تمرين03

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

لكل عدد مركب $z = x + iy$ نرفق له النقطة $M(x;y)$.

1) عين المجموعة (D) مجموعة النقط M من المستوي و التي تحقق : $|z-1| = |z-(1+\sqrt{3})+i|$.

2) نعتبر التحويل f الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = -iz + (3-i)$.

أ- عين طبيعة التحويل f و حدد عناصره المميزة.

ب – عين المجموعة (D') صورة (D) بالتحويل f .

تمرين04

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

لكل نقطة $M(x;y)$ نرفق لها العدد المركب $z = x + iy$.

$A(1;0)$ ، $B(0;1)$ نقطتان من المستوي.

1) نعتبر التشابه المباشر S_1 الذي مركزه النقطة O (مبدأ المعلم) و نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$. – عين الكتابة المركبة لـ S_1 .

2) ليكن A' و B' صورتا النقطتين A و B بالتحويل S_1 .

أ- برهن على وجود تشابه مباشر S_2 يحول A إلى B' و B إلى A' . حدد عناصره المميزة.

ب – أكتب العبارة التحليلية لـ S_2 (x' و y' بدلالة x و y)

ج -استنتج معادلة صورة المستقيم (D) الذي معادلته $x - y + 1 = 0$ بالتحويل S_2 .

تمرين05

نعتبر التشابهين المباشرين S_1 و S_2 المعرفين بالكتابة المركبة كما يلي:

$S_1 : z' = (1+i)z+1$ ، $S_2 : z' = -\frac{i}{2}z - i$

1) عين العناصر المميزة للتشابهين. 2) بوضع $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$ اكتب x' و y' بدلالة x و y في S_1 و اكتب x' و y' بدلالة x و y في S_2.

3) حدد العناصر المميزة للتحويل $S_2 \circ S_1$.

تمرين06

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

- عين في كل حالة من الحالات التالية طبيعة و العناصر المميزة للتحويل f الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z'.

1) $z' = (1-i)z + i$ ، 2) $z' = -\frac{1}{2}z + 1 - i$

3) $z' = (1+\sqrt{3}i)z - i$ ، 4) $z' = 2(1+i)z + i - 1$.

تمرين07

تعطى العبارات التحليلية للتحويلات النقطية h ، r ، S ، T.

$$h:\begin{cases} x' = 2x-1 \\ y' = 2y+3 \end{cases} \quad ، \quad r:\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y+1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 1 \end{cases}$$

$$S:\begin{cases} x' = \sqrt{2}(x+y)+1 \\ y' = \sqrt{2}(-x+y)-1 \end{cases} \quad ، \quad T:\begin{cases} x' = x-2 \\ y' = y+1 \end{cases}$$

1)أكتب العبارة المركبة لكل تحويل ، ثم عين طبيعة وعناصره المميزة.

تمرين08

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

نعتبر النقط : $A(1;0)$ ، $B(2;0)$ ، $C(1;1)$

1) عين نسبة و زاوية التشابه الذي مركزه B و يحول A إلى C .

2) S تحويل نقطي في المستوي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = (1-i)z + 2i$

ـ ما طبيعة التحويل ؟ ما طبيعة المثلث BMM' ؟

تمرين09

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

نعتبر التحويل T الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$

حيث: $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z$. 1) ما طبيعة التحويل T ؟ ما هي عناصره المميزة ؟ 2) لتكن النقطة M_1 ذات اللاحقة $z_1 = \sqrt{3}+i$.

عين z_2 و z_3

لاحقتي M_2 و M_3 حيث: $T(M_1) = M_2$ و $T(M_2) = M_3$.

3)احسب العدد المركب $\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$ ثم استنتج طبيعة المثلث $M_1M_2M_3$

4) نعتبر الدوران r الذي مركزه النقطة O (مبدأ المعلم و زاويته $\pi/3$

ـ عين التحويل S حيث: $S = T \circ r$ وما هي عناصره المميزة؟

تمرين10

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

A ، B ، C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب :

$z_A = -5+6i$ ، $z_B = -7-2i$ ، $z_C = 3-2i$.

1) تحقق أن النقطة f ذات اللاحقة $z_F = -2+i$ هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

2) لتكن H النقطة ذات اللاحقة (-5) . عين العناصر المميزة للتشابه المباشر الذي مركزه A و يحول النقطة C إلى النقطة H .

3) لتكن النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$ ، عين لاحقة النقطة G صورة I بالتحاكي الذي مركزه B و نسبته $K = 2/3$.

تمرين11

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

النقط : $A(0;1)$ ، $B(0;2)$ ، $C(1;1)$.

1) عين زاوية و نسبة التشابه المباشر S الذي مركزه B و يحول A إلى C .

2) M و M' نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب z ، z' حيث: $M' = S(M)$. عين مجموعة النقط M من المستوي حيث $\|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{OM'}\|$.

3) r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ- عين العبارة المركبة للدوران r . ب- عين لاحقة النقطتين D و E المعرفتين بـ: $r(B) = D$ و $r(E) = C$.

جـ - عين العبارة المركبة للتحويل f المعرف بـ: $f = S \circ r$
و استنتج عناصره المميزة.

تمرين12

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

نعتبر التحويلين r و S اللذان يحولان النقطة $M(x;y)$ ذات اللاحقة z إلى النقطة $M'(x';y')$ ذات اللاحقة z' حيث:

$$r : \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 2 \end{cases} \quad ، \quad S : \begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$$

1) أكتب z' بدلالة z في كل من التحويلين r و S .

2) استنتج الطبيعة و العناصر المميزة لكل من التحويلين r و S

3) نعتبرالتحويل $f = S \circ r$. أ- أكتب العبارة المركبة للتحويل f .

ب- عين مجموعة النقاط الصامدة للتحويل f .

جـ- ما طبيعة التحويل f ؟

تمرين13

تذكير: إذا كان S تشابه مباشر مركزه النقطة ذات اللاحقة z_0 و نسبته k و زاويته θ فإن : $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$.

1) أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر الذي مركزه النقطة ذات اللاحقة $-2i$ و زاويته $\pi/6$ و نسبته 2 .

2) نعتبر التحويل r الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ بحيث: $z' + 2i = e^{i\frac{\pi}{2}}(z + 2i)$. أ- ما طبيعة التحويل r و ما هي عناصره المميزة؟ .

تمرين14

في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

نعتبر النقط A ، B ، C ، D ذات اللواحق على الترتيب:
$z_A = 1 - i$ ، $z_B = 1 + 2i$ ، $z_C = 3 - i$ ، $z_D = 2i$.

1)عين العبارة المركبة للتشابه S المعرف بـ:
$S(A) = C$ ، $S(B) = D$.

2) عين العبارة المركبة للدوران r الذي مركزه A و زاويته $\pi/2$.

3) عين العبارة المركبة ثم العبارة التحليلية للتحويل f المعرف بـ: $f = S \circ r$. 4) عين معادلة صورة الدائرة (C) التي مركزها $\varpi(1;2)$ و نصف قطرها $2cm$ بالتحويل f .

الجداء السلمي

■ الجداء السلمي في الفضاء

تعريف: الجداء السلمي في الفضاء لشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في كل مستو يحتوي هذين الشعاعين .

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$.
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$ إذا كان $\vec{u}\neq\vec{0}$ و $\vec{v}\neq\vec{0}$

■ حالات خاصة:

- إذا كان الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا و لهما نفس الاتجاه فإن :

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$ (لأن $\cos(\vec{u},\vec{v})=1$)

- إذا كان الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا و كان اتجاههما متعاكسان فإن : $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$ (لأن $\cos(\vec{u},\vec{v})=-1$)
- يرمز للجداء السلمي $\vec{u}\cdot\vec{u}$ بـ $\|\vec{u}\|^2$ ومنه : $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$

■ خواص الجداء السلمي:

$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{w}$ أشعة من الفضاء ، λ عدد حقيقي.

1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$. 2) $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

3) $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$. 4) $\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$

من خواص الجداء السلمي نستنتج ما يلي :

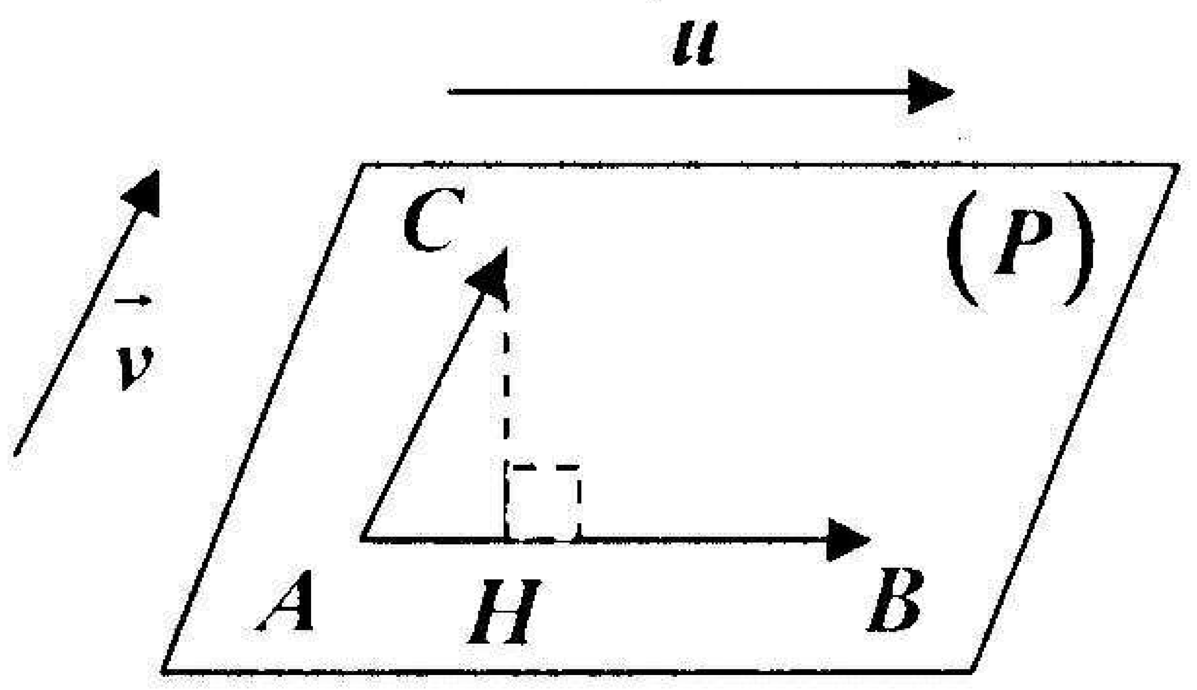
$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ ، $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

■ الجداء السلمي و الإسقاط العمودي :

$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء ، A ، B ، C ثلاث نقاط حيث:

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ ، $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

لتكن النقطة H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) . يسمى الشعاع $\overrightarrow{AH}=\vec{v}'$ المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ على الشعاع $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$.

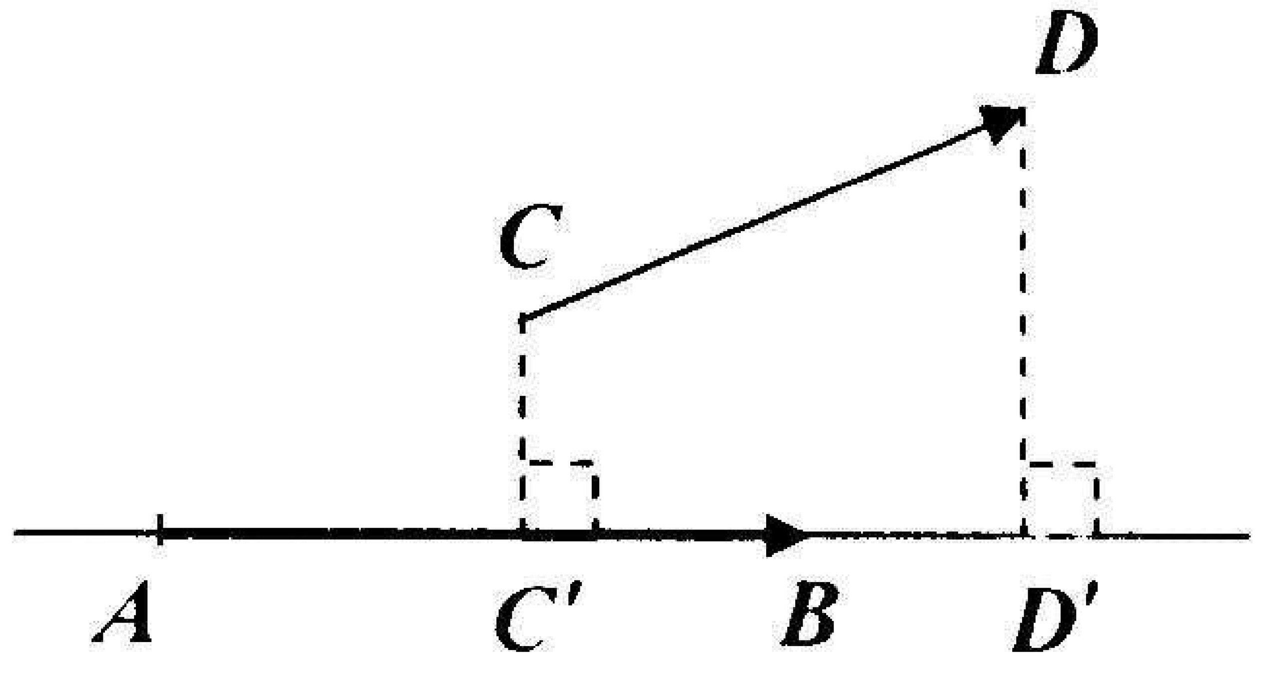


نستطيع أن نبرهن أن: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$

مبرهنة: إذا كان $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان وكان $\vec{v}'$ هو المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على $\vec{u}$ فإن: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v}'$

نستنتج أن : إذا كان $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان متعامدا ن فإن : $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ شعاعان غير معدومين وكانت C' و D' المسقطا ن العموديان على الترتيب للنقطتين C و D على المستقيم (AB) فإن : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$



■ **العبارة التحليلية للجداء السلمي :**

الفضاء منسوب إلى معلم متعامدو متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

$\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ شعاعان .

لدينا : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

نستنتج أن:

1) $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ومنه : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

2) $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ نقطتان من الفضاء منسوب إلى معلم متعامدو متجانس فإن:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

المستقيمات والمستويات في الفضاء

■ **المستقيمات في الفضاء :**

- التمثيل الوسيطي لمستقيم:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامدو متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

(D) مستقيم يشمل النقطة $A(x_0;y_0;z_0)$ و $\vec{u}(a;b;c)$ شعاع توجيهي له .

$M(x;y;z)$ نقطة من المستقيم (D) إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي t حيث: $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$. وهذا يعني أن :

$$\begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct \end{cases}$$ ومنه: $$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$ مع $t \in \mathbb{R}$

المستقيم (D) الذي يشمل النقطة $A(x_0;y_0;z_0)$ و له شعاع توجيهي $\vec{u}(a;b;c)$ هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ بحيث:

$$(S)\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$ مع $t \in \mathbb{R}$. الجملة (S) تسمى بالتمثيل الوسيطي للمستقيم (D) في الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ و يسمى العدد الحقيقي t بالوسيط .

تمثيل وسيطي لقطعة مستقيم ، نصف مستقيم:

A و B نقطتان من الفضاء ، نرمز بـ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.

التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) الذي يشمل النقطة $A(x_0;y_0;z_0)$ و يقبل $\vec{u}(a;b;c)$ شعاع توجيهي له هو :

$$(S)\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases}$$ مع $t\in\mathbb{R}$

- التمثيل الوسيطي للقطعة المستقيمة $[AB]$ ، يتم بأخذ $t\in[0;1]$ في الجملة (S) .
- التمثيل الوسيطي لنصف المستقيم $[AB)$ هو الجملة (S) مع $t\in[0;+\infty[$.

■ استعمال المرجح:

A و B نقطتان من الفضاء .

- المستقيم (AB) هو مجموعة مراجيح للنقطتين A و B .
- القطعة المستقيمة $[AB]$ هي مجموعة مراجيح للنقطتين A و B مرفقتين بمعاملين من نفس الإشارة.

■ معادلات ديكارتية لمستقيم:

(D) مستقيم يمر بالنقطة $A(x_0;y_0;z_0)$ و $\vec{u}(a;b;c)$ شعاع توجيه له .

$M(x;y;z)\in(D)$ يعني أن: $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$ مع $t\in\mathbb{R}$

ومنه : $\begin{cases}x-x_0=ta\\ y-y_0=tb\\ z-z_0=tc\end{cases}$ و هذا يعني أنه إذا كان $abc\neq 0$ فإن:

أي: $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$

$\begin{cases}b(x-x_0)-a(y-y_0)=0\\ c(x-x_0)-a(z-z_0)=0\end{cases}$ و هذه الجملة تمثل جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (D) .

إذا كان أحد المقامات منعدما فإن البسط المرتبط به يكون منعدما أيضا .

مثلا: إذا انعدم b أي $b=0$ فإن :

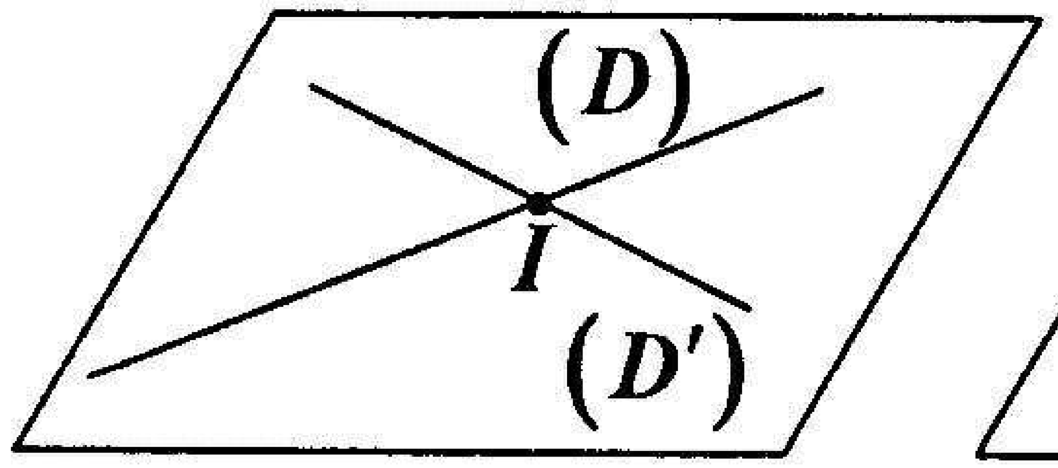
$$\begin{cases}c(x-x_0)-a(z-z_0)=0\\ y=y_0\end{cases}$$

الوضعية النسبية لمستقيمين في الفضاء:

(D) و (D') مستقيمان في الفضاء. توجد أربع حالات ممكنة:

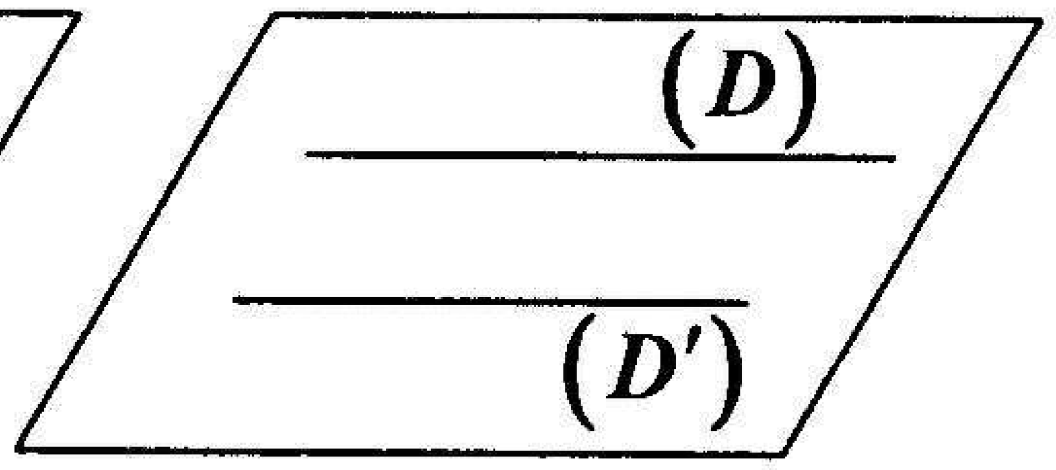
في الحالات الثلاثة : -1- ، -2- ، -3- ، (D) و (D') هي من نفس المستوي .

-1-



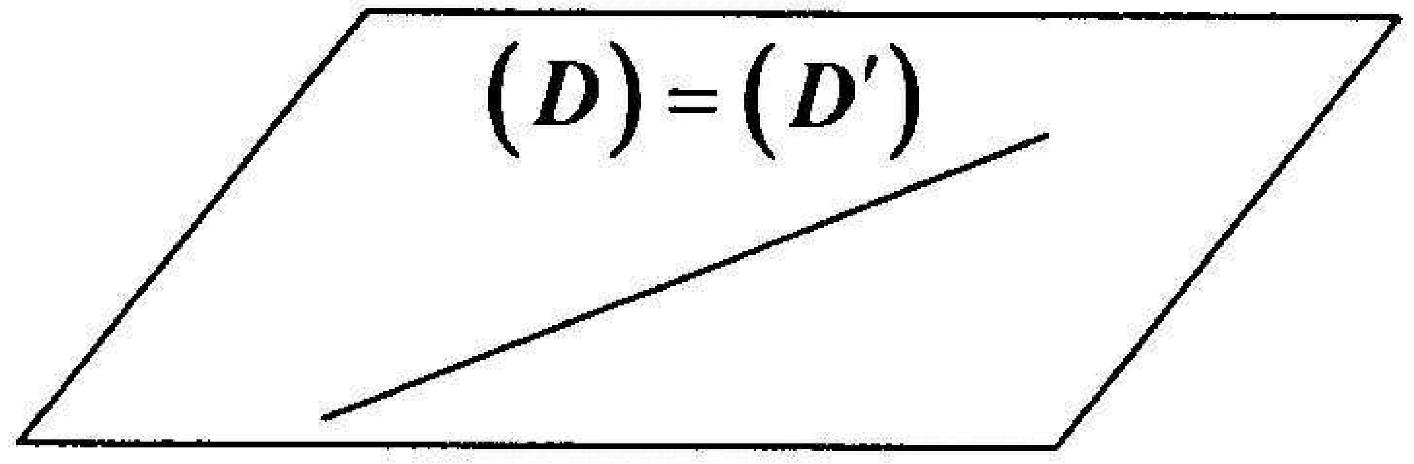
$(D)\cap(D')=\{I\}$

-2-



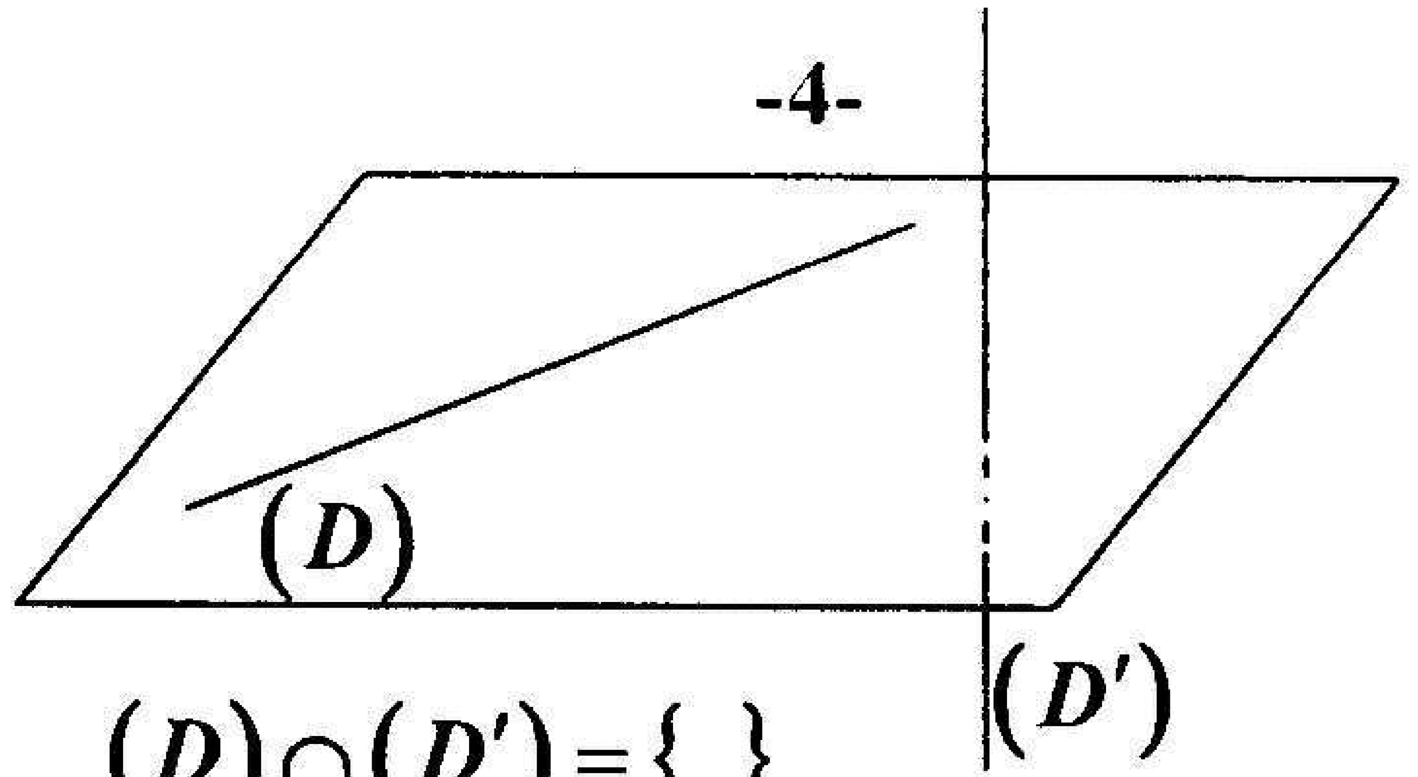
$(D)\cap(D')=\{\ \}$

-3-



$$(D)\cap(D')=(D)=(D')$$

-4-



$$(D)\cap(D')=\{\ \}$$

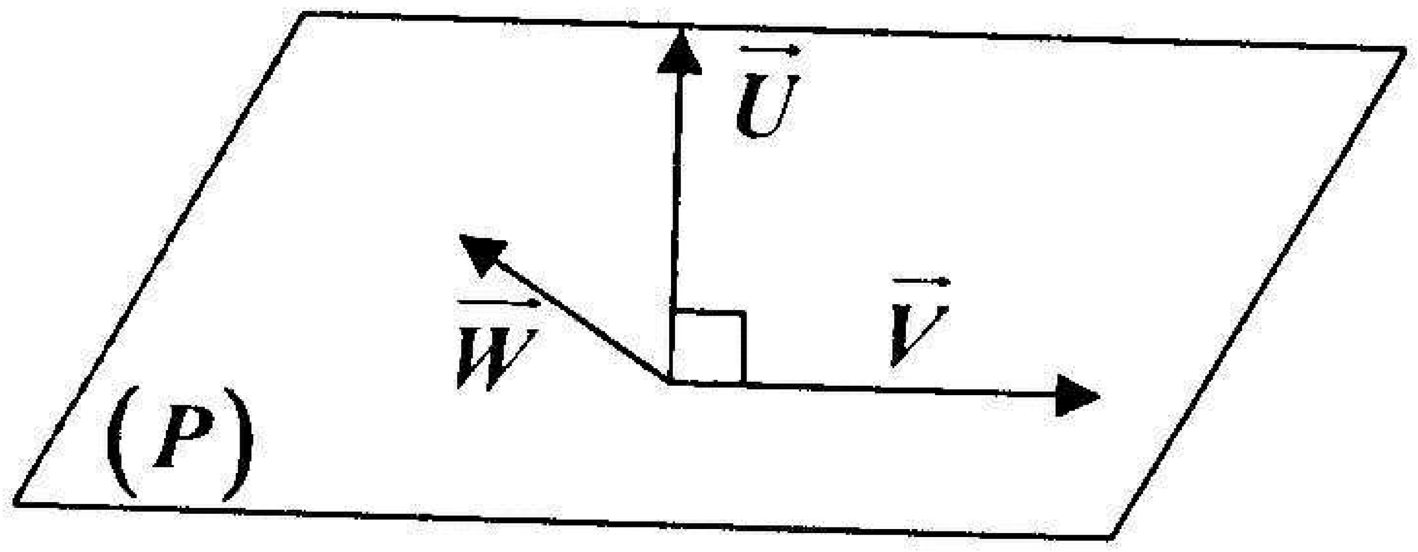
المستقيمان (D) و (D') من مستويين مختلفين

المعادلةالديكارتية لمستو :

- الشعاع الناظم لمستو

<u>تعريف</u>: (P) مستو في الفضاء . نقول أن الشعاع $\vec{u}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P) إذا كان من أجل كل نقطتين M و N من المستوي (P) فإن $\vec{u}.\overrightarrow{MN}=0$

نقول أيضا أن الشعاع $\vec{u}$ عمودي على المستوي (P)



نعلم أن كل شعاع غير معدوم و عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا من المستوي (P) هو شعاع عمودي على المستوي (P) ، أي شعاع ناظمي لـ (P). نستعمل هذا التعريف لتعيين شعاع ناظمي لمستو .

الفضاء منسوب لمعلم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

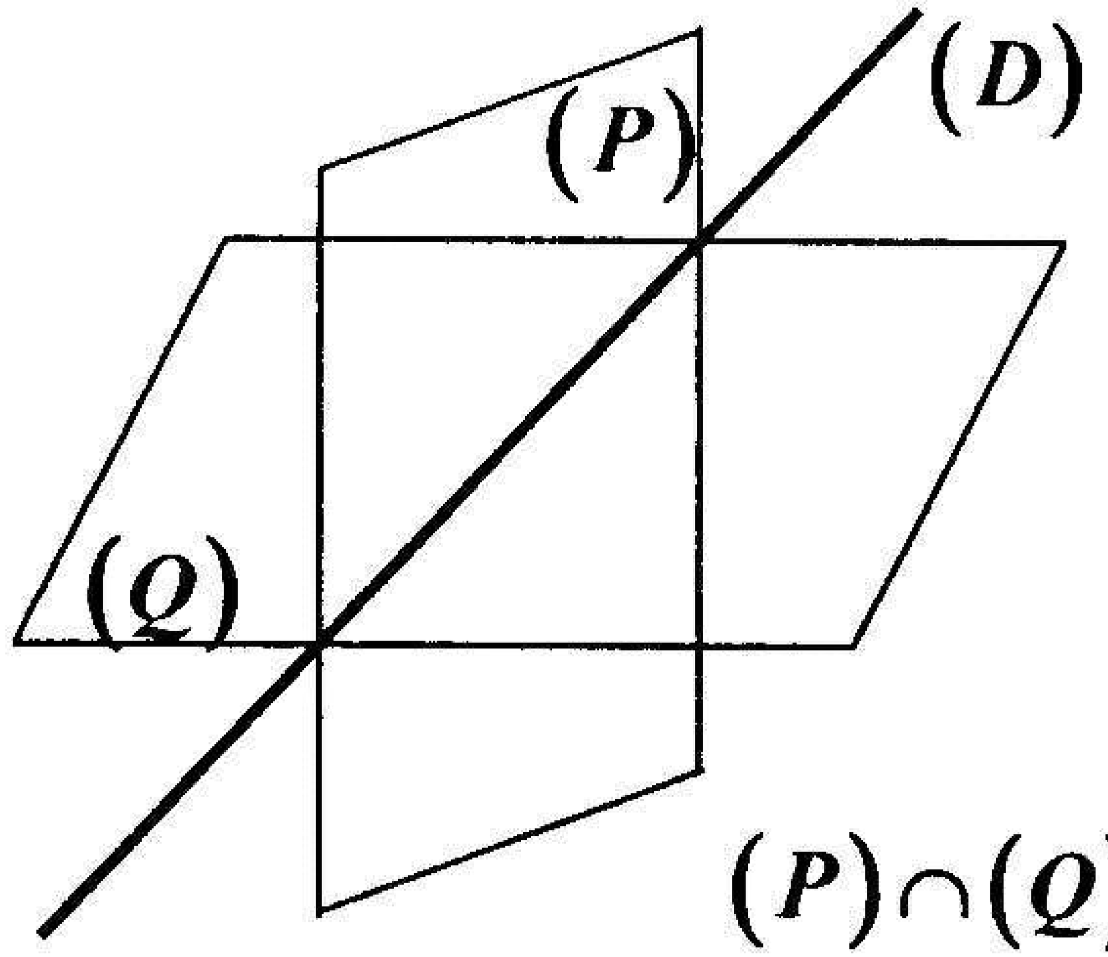
- مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث: $ax+by+cz+d=0$ و $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ هي مستو، و المعادلة $ax+by+cz+d=0$ تسمى معادلة ديكارتية له.
- كل مستو ،حيث $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي له يقبل معادلة ديكارتية من الشكل $ax+by+cz+d=0$.

حالات خاصة:

- المعادلة الديكارتية للمستوي $(o;\vec{i};\vec{j})$ هي : $z=0$
- المعادلة الديكارتية للمستوي $(o;\vec{j};\vec{k})$ هي : $x=0$
- المعادلة الديكارتية للمستوي $(o;\vec{i};\vec{k})$ هي : $y=0$

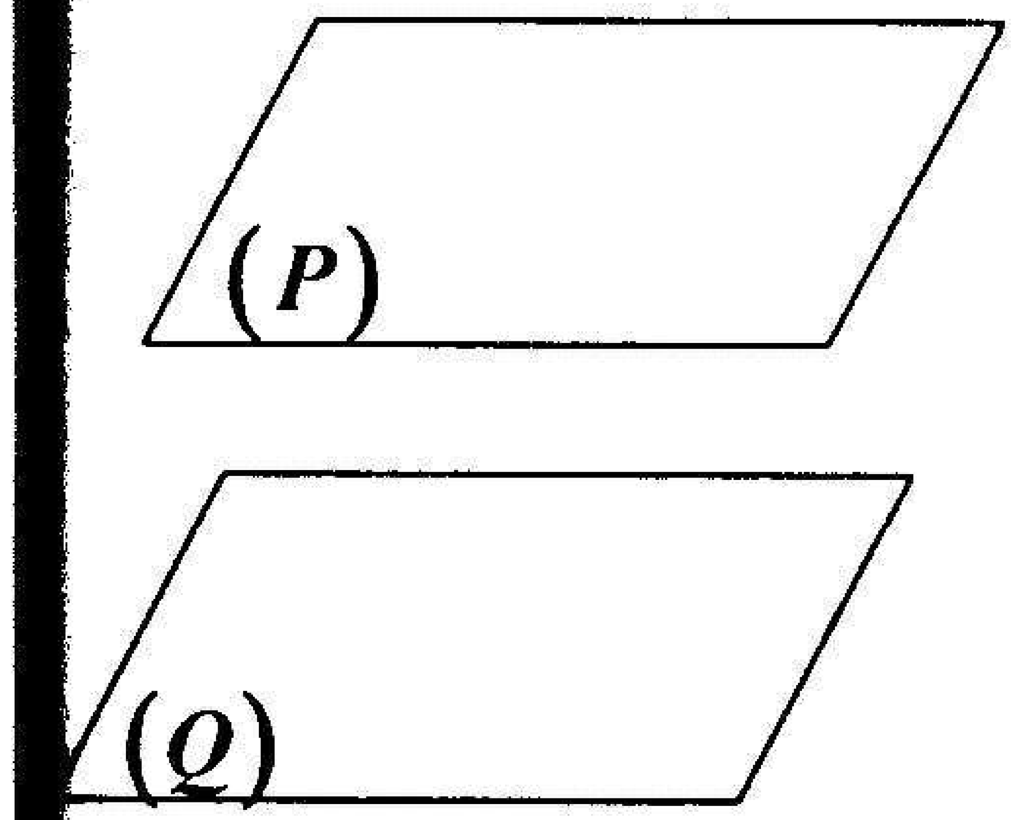
الوضعية النسبية لمستويين:

<u>المستويان متقاطعان</u>

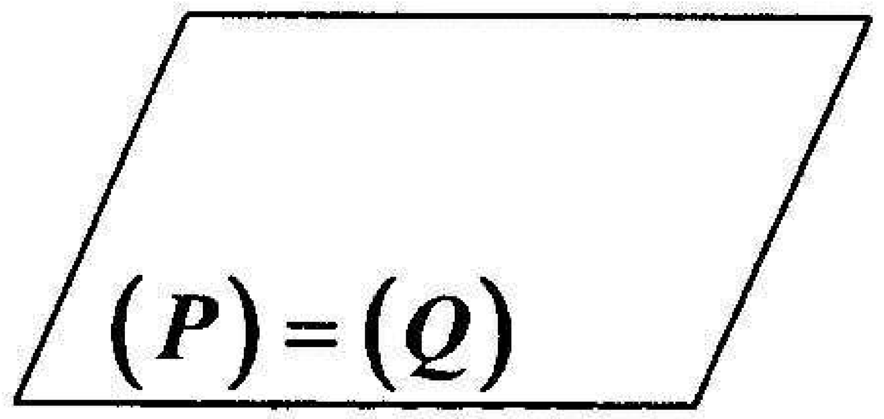


$(P)\cap(Q)=(D)$

<u>المستويان متوازيان</u>



$(P)\cap(Q)=\{\ \}$

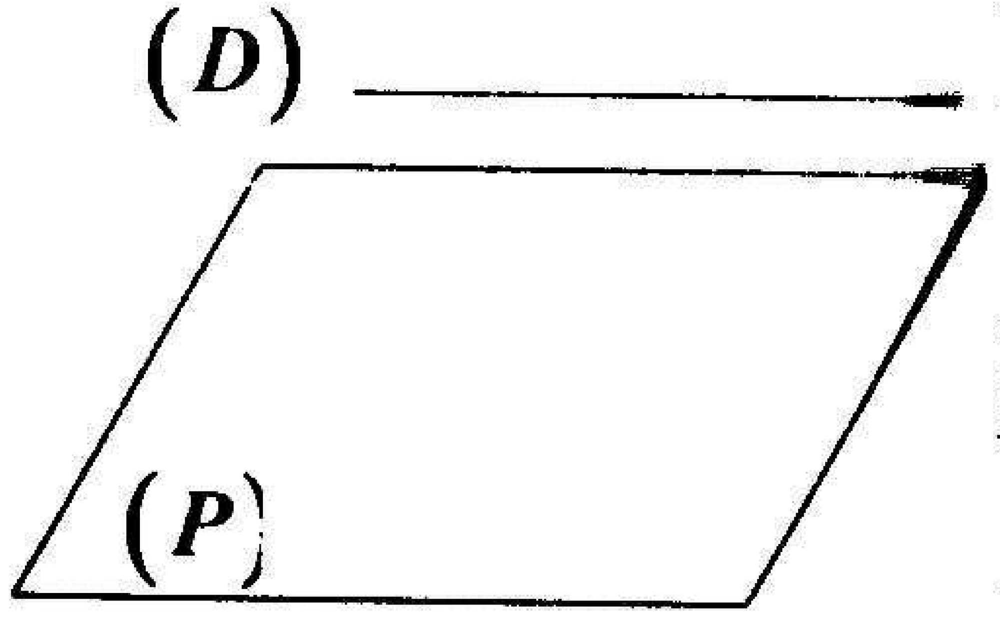


$(P)\cap(Q)=(P)=(Q)$

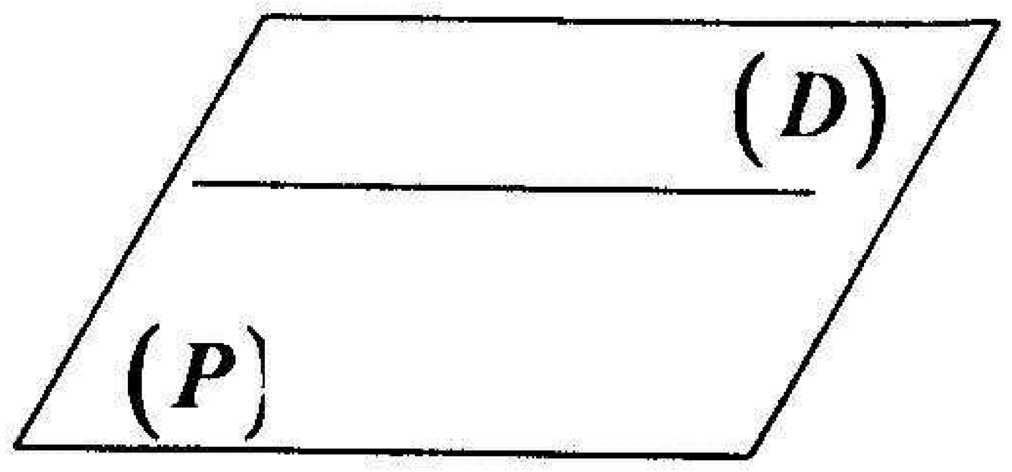
ملاحظة: تقاطع ثلاثة مستويات يكون مستقيما أو نقطة أو مجموعة خالية.

- **الوضعية النسبية لمستو و مستقيم:**

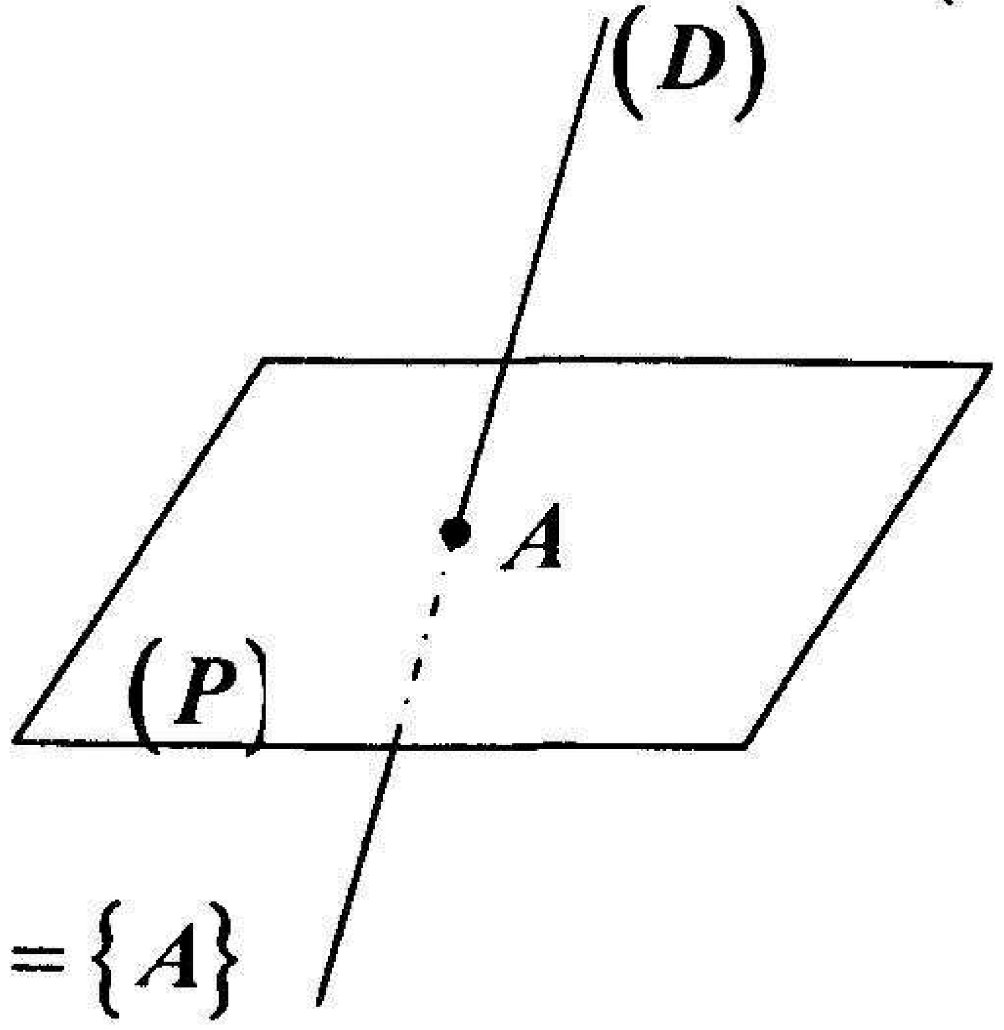
(P) مستو و (D) مستقيم في الفضاء ، لدينا ثلاثة حالات ممكنة



$(D)\cap(P)=\{\ \}$



$(D)\cap(P)=(D)$



$(D)\cap(P)=\{A\}$

خاصيات تتعلق بشرط تعامد و توازي المستقيمات و المستويات في الفضاء

1) (D) و (Δ) مستقيمان موجهان بالشعاعين $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ على الترتيب.

- $(\Delta)\perp(D)$ يكافئ $\vec{u}\perp\vec{v}$ يكافئ $\boxed{aa'+bb'+cc'=0}$

- $(D)//(\Delta)$ يكافئ $\vec{u}//\vec{v}$ يكافئ $\boxed{\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}}$

2) (D) مستقيم شعاعه التوجيهي $\vec{u}(a;b;c)$ و (P) مستو حيث $\vec{v}(a';b';c')$ شعاع ناظمي له .

- $(P)//(D)$ يكافئ $\vec{u}\perp\vec{v}$ يكافئ $\boxed{aa'+bb'+cc'=0}$
- $(D)\perp(P)$ يكافئ $\vec{u}//\vec{v}$ يكافئ $\boxed{\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}}$

3) (P) و (Q) مستويان $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ ناظميان لهما على الترتيب . - $(Q)//(P)$ يكافئ $\vec{u}//\vec{v}$ يكافئ

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\neq\frac{d}{d'}$$ (متوازيين تماما)

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$$ (منطبقين)

- $(Q)\perp(P)$ يكافئ $\vec{u}\perp\vec{v}$ يكافئ $\boxed{aa'+bb'+cc'=0}$

■ **تقاطع مستويين**

(P) مستو معادلته $ax+by+cz+d=0$ و (Q) مستو معادلته $a'x+b'y+c'z+d'=0$

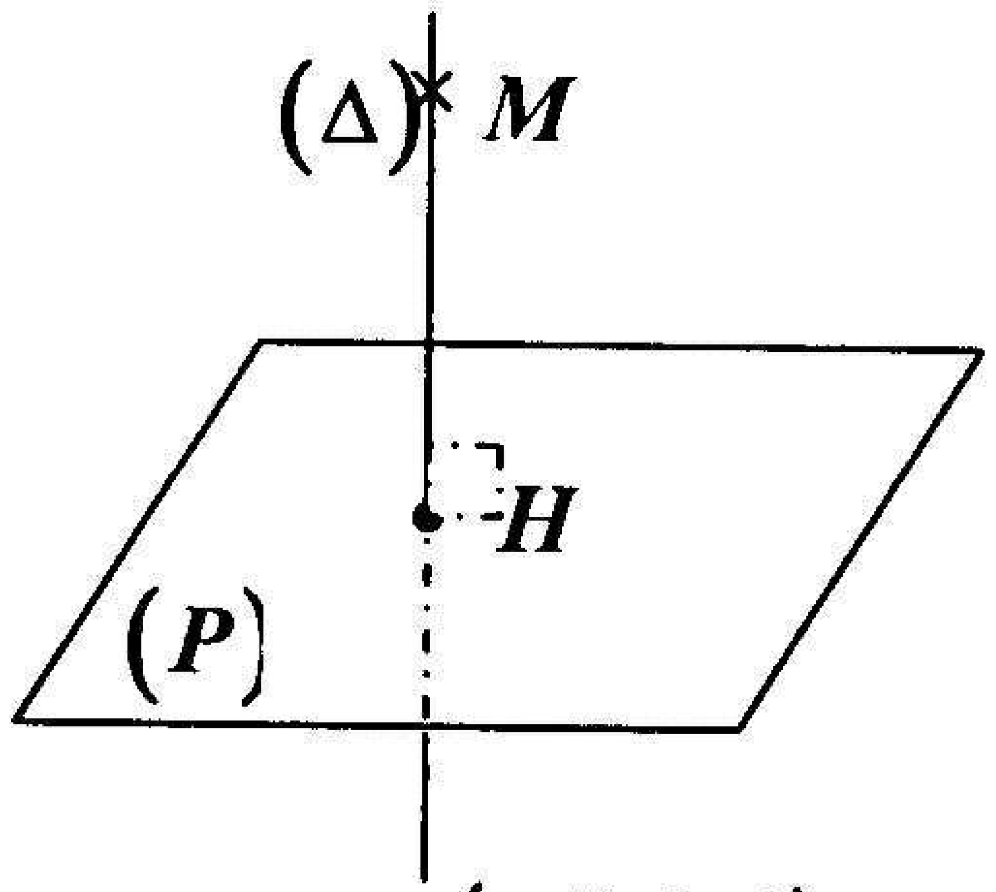
إذا كان المستويين (P) و (Q) غير متوزيين فهما يتقاطعان وفق مستقيم (D) معرف بجملة المعادلتين الديكارتيتين للمستويين

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

■ **المسافة بين نقطة و مستو:**

(P) مستو ، M نقطة من الفضاء. المستقيم (Δ) العمودي على (P) و الذي يشمل M يقطع (P) في H . تسمى النقطة H بالمسقط العمودي للنقطة M على (P).

طول القطعة المستقيمة $[MH]$ يمثل المسافة بين النقطة M و المستوي (P) و نرمز لها بـ: $d=d(M;(P))$



في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ المسافة بين النقطة $A(x_0;y_0;z_0)$ و المستوي (P) ذو المعادلة $ax+by+cz+d=0$ هي: $d=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

تمارين محلولة

تمرين01

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .

نعتبر الشعاعين $\vec{u}(2;1;-2)$ و $\vec{v}(-3;0;4)$

1) احسب الجداء السلمي $\vec{u}.\vec{v}$. 2) احسب $\cos(\vec{u};\vec{v})$.

3) عين مجموعة الأشعة من الفضاء التي تعامد $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

تمرين02

نعتبر الأشعة $\vec{u}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$ و $\vec{v}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ و $\vec{w}\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

1) برهن بأن $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ هو أساس متعامد و متجانس.

2)عين العدد الحقيقي m كي $\vec{n}(1;m;m+1)$ يعامد $\vec{u}$.

تمرين03

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبرالنقط $A(\lambda;2;3)$ ، $B(2;0;-1)$ ، $C(1;4;0)$ ، $D(0;0;1)$. 1) احسب بدلالة λ الجداءات السلمية التالية :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$.

2) عين قيمة العدد الحقيقي λ كي يكون المثلث ABC قائم في C .

3) في ما يأتي نأخذ $\lambda=-4$.

أ) بين أن النقط A ، B ، C ، D لا تنتمي إلى نفس المستوي.

ب) عين إحداثيات النقطة G مرجح الجملة $\{(C;-2),(B;+1),(A;2)\}$.

جـ) عين المجموعة (E) مجموعة النقط M من الفضاء و التي تحقق ما يلي: $\left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{MD}=0$

د) عين معادلة ديكارتية للمجموعة (E)

تمرين04

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .

A ، B ، C ثلاث نقط من الفضاء .

نعتبر الجملة $\{(C;2),(B;\alpha+2),(A;\alpha)\}$.....*

1) عين قيم α كي تقبل الجملة * النقطة G_α مرجحا.

2) عين قيمة α كي تقبل الجملة * النقطة G المعرفة بالعلاقة $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ مرجحا.

3) نفرض أن $\alpha=2$ و أن النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة و لتكن I منتصف $[AC]$ و $BI=4$.

أ) برهن في هذه الحالة أن النقطة G هي منتصف $[BI]$.

ب) عين مجموعة النقط M من الفضاء و التي تحقق : $MB^2+MI^2=16$.

تمرين05

I) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .

A ، B ، C ثلاث نقط من الفضاء . m وسيط حقيقي.

1) ما هو الشرط اللازم و الكافي حتى تقبل الجملة

$\{(C;2m-1),(B;m+1),(A;m)\}$ مرجحا G_m ؟

2) أنشئ بطريقتين مختلفتين G_1 مرجح الجملة من أجل $m=1$.

3) عين المجموعتين E_1 و E_2 من النقاط و المعرفتين بـ:

$$E_1=\left\{M\in E_1 / \left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right\|\right\}$$

$$E_2=\left\{M\in E_2 / \left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{MC}=0\right\}$$

II) نزود الفضاء بمعلم متعامد و متجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ و نفرض أن

$A(1;1;0)$ ، $B(-1;1;0)$ ، $C(0;-1;1)$

1- أ - بين أن النقط A ، B ، C تشكل مثلثا متساوي الساقين.

ب – احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ ، ثم استنتج قيمة مقربة إلى 0,1 درجة لقيس الزاوية $A\widehat{C}B$.

جـ - احسب : $\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)^2$ ، $\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right)$ ، $\left\|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right\|^2$.

2) عين المجموعة (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء و التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

تمرين06

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .

لعتبر المستقيمات الثلاثة (D_1) ، (D_2) ، (D_3) حيث:

$$(D_1):\begin{cases}x=1+2t\\ y=-2+t\ ;\ t\in\mathbb{R}\\ z=1-t\end{cases}\ ،\ (D_2):\begin{cases}x=5-4t'\\ y=-2t'\ ;\ t'\in\mathbb{R}\\ z=-1+2t'\end{cases}$$

$$(D_3):\begin{cases}x-y-2z=0\\ 2x+3y+5=5\end{cases}$$

1) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D_3) .

2) بين أن المستقيمين (D_1) و (D_2) متطابقان.

3)) بين أن المستقيمان (D_1) و (D_3) ليس من نفس المستوي.

4) (Δ) مستقيم يمر بالنقطة $A(5;-1;4)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}(3;1;1)$. بين أن (D_1) يقطع (Δ) في نقطة يطلب تعيينها .

تمرين07

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

النقاط $A(-1;0;2)$ ، $B(-3;2;4)$ ، $C(1;-1;-2)$ ، $D(2;3;-1)$. 1) برهن أن النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة. 2) برهن أن الشعاع $\vec{n}(3;2;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي

(ABC) . 3) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

4) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يوازي (ABC) و يمر بالنقطة D .

تمرين08

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقاط $A(1;-1;-4)$ ، $B(2;0;5)$ ، $C(2;-1;1)$.

1) أكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم (D) الذي يمر بالنقطة C و شعاعه التوجيهي $\vec{u}(1;2;-1)$.

2) أكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم (AB).

3) تحقق بأن المستقيم (AB) محتوى في المستوي (P) ذو المعادلة $5x+4y-z-5=0$. 4) عين تقاطع (D) والمستوي (P)

تمرين09

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .

نعتبر النقاط $A(-1;2;1)$ ، $B(3;-2;3)$ ، $C(2;1;-1)$.

1) أكتب المعادلة الديكارتية للمستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

2) نعتبر المستوي (P_m) ذو المعادلة الديكارتية :

$$(m+1)x+my-2z+m-1=0$$

- عين قيمة العدد الحقيقي m حتى يكون :

أ- (P_m) يوازي المستوي (Q) ذو المعادلة الديكارتية :

$2x+y-2z+3=0$. هل يمكن أن يكون (P_m) منطبقا على (Q)؟ ب- عين قيمة m من أجلها يكون (P_m) يعامد المستوي (R) ذو المعادلة $3x+2y-z+1=0$

تمرين10

(P) و (R) مستويان معادلتاهما على الترتيب : $x+y-z=0$ و $-x+y+2z+1=0$. ليكن (Δ) المستقيم الذي يمثل تقاطع المستويين (P) و (R) . $M(x;y;z)$ نقطة من المستقيم (Δ) .

1) أ- تحقق أن $x=\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}$ و $y=-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}$.

ب – عين شعاع توجيه المستقيم (Δ) .

2) عين المعادلة الديكارتية للمستوي (π) الذي يشمل $A(1;0;0)$ و يعامد كل من (P) و (R) .

3) عين تقاطع المستوي (π) مع المستقيم (Δ) .

تمرين11

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1) أكتب معادلة السطح الكروي (S) الذي مركزه $\varpi(1;2;-1)$ و يشمل النقطة $A(2;0;3)$.

2) أكتب معادلة المستوي (P) الذي يمس الكرة (S) في A .

3) أثبت أن المستوي (π) الذي معادلته $x+2y+2z+15=0$ يمس السطح الكروي (S') ذو المعادلة $x^2+y^2+z^2-25=0$

ثم عين إحداثيات نقطة التماس .

تمرين12

في الفضاء (E) منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .

نعتبر النقاط $A(-1;2;-1)$ ، $B(1;0;0)$ ، $\varpi(2;1;0)$.

1) أعط تميلا وسيطيا للمستقيم (AB) . 2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(AB\varpi)$. 3) نعتبر في الفضاء (E) الكرة (S) المعرفة بالمعادلة $x^2+y^2+z^2-4x-2y-1=0$.

أ ـ عين نصف قطر الكرة (S) و حدد مركزها .

ب ـعين تقاطع الكرة (S) و المستوي $(AB\varpi)$.

جـ - بين أن المستقيم (AB) يقطع الكرة (S) في نقطتين يطلب تعيين إحداثيتيهما .

تمرين13

1) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل $A(-3;5;1)$ و العمودي على المستوي (P) الذي معادلته: $x-2y+3z=0$.

2) عين تقاطع (D) مع المستقيم (Δ) الذي تمثيله الوسيطي هو :

$$\begin{cases} x=t-1 \\ y=-2t+1 \quad ; \quad t\in\mathbb{R} \\ z=2t+5 \end{cases}$$

3) عين تقاطع (D) مع المستوي $(o;\vec{i};\vec{j})$.

تمرين14

1) تحقق أن المستقيمين (D) و (D') متقاطعان حيث:

$$(D):\begin{cases} x=-1 \\ y=1-t \quad ; \quad t\in\mathbb{R} \\ z=1-2t \end{cases} \quad \text{و} \quad (D'):\begin{cases} x=4-5t' \\ y=3-2t' \quad ; \quad t'\in\mathbb{R} \\ z=-1+2t' \end{cases}$$

2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل (D) و (D') .

3) بين أن المستقيم (D') يوازي المستوي (Q) ذو المعادلة :

$2x-2y+3z-1=0$.

تمرين15

لنعتبر المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي

$$\begin{cases} x=-t+3 \\ y=t+2 \\ z=t \end{cases}$$

مع $t\in\mathbb{R}$ و المستقيم (D') المعرف بما يلي:

$$\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$$

1) أكتب تميلا وسيطيا للمستقيم (D') ثم بين أن (D) يوازي (D') . هل المستقيمان (D) و (D') متوازيان تماما؟ .

2) $A(1;2;-1)$ نقطة من الفضاء . - احسب إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (D) ثم استنتج المسافة بين

النقطة A و المستقيم (D) .

تمرين16

(P) مستو معادلته الديكارتية $2x+y-3z-5=0$.

1) عين إحداثيات نقاط تقاطع المستوي (P) مع محاور المعلم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. 2) نعتبر المستويين (Q) و (R) حيث:

$(Q): x+3y+z-10=0$ و $(R): -2x+5y+9z-13=0$

أ) بين أن المستويين (Q) و (R) يتقاطعان وفق مستقيم (D) يطلب تعيين نقطة منه و شعاع توجيهه .

ب) بين أن المستوي (P) يشمل المستقيم (D) .

جـ) استنتج تفسيرا هندسيا لحل الجملة:

$$\begin{cases} 2x+y-3z-5=0 \\ -2x+5y+9z-13=0 \\ x+3y+z-10=0 \end{cases}$$

تمرين17

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقاط $A(2;0;1)$ ، $B(2;0;5)$ ، $C(-1;2;2)$.

1) تحقق أن النقاط A ، B ، C ليست إستقامية ، ثم بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي $y+2z-2=0$.

2) لتكن G مرجح الجملة $\{(C;2),(B;1),(A;-2)\}$.

أ – عين إحداثيات النقطة G . ب- بين أن مجموعة النقاط

$M(x;y;z)$ و التي تحقق $-2MA^2+MB^2+2MC^2=13$ هي كرة (S) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

جـ - تحقق أن النقطة $I(0;-2;2)$ تنتمي إلى (S) و أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (R) الماس للكرة (S) عند النقطة I .

3) أدرس تقاطع المستويين (R) و (ABC) .

تمرين18

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط $A(0;1;1)$ ، $B(1;0;0)$ ، $C(2;-1;-1)$ ، $D(-1;2;1)$ و المستوي (P) ذو المعادلة الديكارتية $x-y+2z-1=0$ و المستقيم (Δ) المعرف بتمثيله الوسيطي

$$\begin{cases} x=2\lambda-1 \\ y=\lambda+2 \\ z=\lambda+1 \end{cases}$$

مع $\lambda\in\mathbb{R}$

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط . عين الجواب الصحيح معللا اختيارك. 1) المستوي (P) هو :

ج1) (ACD) . ج2) (ABC). ج3) (BCD) .

2)شعاع توجيه المستقيم (Δ) هو:

ج1) $\vec{u}(2;1;1)$. ج2) $\vec{u}(2;-1;1)$. ج3) $\vec{u}(2;1;2)$.

3) المستقيم (Δ) : ج1) يوازي (P) . ج2) يقطع (P).

ج3) يعامد (P)

4) ج1) $A\in(\Delta)$. ج2) $A\in(P)$. ج3) $A\in(oz)$.

5)المسافة بين النقطة D و المستوي (P) هي:

ج1) $\frac{\sqrt{6}}{5}$. ج2) $\frac{\sqrt{3}}{5}$. ج3) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

6) المستقيم (Δ) يقطع المستوي (P) في نقطة ذات الإحاثيات:

ج1) $\left(\frac{1}{3};\frac{8}{3};\frac{5}{3}\right)$. ج2) $(1;3;1)$. ج3) $\left(1;\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$.

تمرين19

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط $A(1;0;3)$ ، $B(1;3;0)$ ، $C(3;1;1)$. 1) بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي : $x+2y+2z-7=0$

2) ليكن (Q) المستوي ذو المعادلة $2x-2y+z-5=0$.

أ - بين أن المستوي (Q) عمودي على المستوي (ABC).

ب- عين التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) الذي يمثل تقاطع المستويين (Q) و (ABC) .

جـ - احسب المسافة بين النقطة $D(2;-1;1)$ و المستوي (Q).

تمرين20

حل الجملة و فسر هندسيا النتيجة .

$$\begin{cases} 2x+y-z=5 \\ -3x+2y-1=0 \\ 4x-3y+2z=-4 \end{cases}$$

تمرين21

نعتبر المستويين (P) و (Q) حيث:

$(Q): 4x+y+4z=7$ ، $(P): -2x+y-5z+5=0$

1) بين أن المستويين (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب إعطاء التمثيل الوسيطي له.

2) $B(1;0;-1)$ نقطة من الفضاء و H مسقطها على (Δ) .

احسب إحداثيات H و استنتج المسافة بين النقطة B و (Δ) .

3) أكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (R) الذي يشمل $A(2;-1;0)$ و $\vec{u}(-3;4;2)$ شعاع ناظمي له .

4) تحقق أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ) ثم استنتج تقاطع المستويات الثلاثة (P) و (Q) و (R).

تمرين22

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقاط $A(1;1;-2)$ ، $B(2;1;0)$ ، $C(0;-1;-1)$.

1)برهن أن النقاط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة .

2) عين الشعاع $\vec{n}$ حيث: $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ ، و استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .3) تحقق بأن المستوي (P) ذو المعادلة $-4x+3y+2z-1=0$ يوازي المستوي (ABC) .

4) بين أن المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي :

$\begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = \lambda - 2 \quad ; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3\lambda + 1 \end{cases}$ يقطع المستوي (P) في نقطة يطلب تعيينها.

تمرين23

نعتبر المستقيمين (D) و (Δ) المعرفين كما يلي :

$$(\Delta):\begin{cases} x = 3\lambda - 2 \\ y = \lambda \\ z = \lambda + 1 \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R} \text{ ، } (D): \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = z - 2$$

1) بين أن المستقيمين (D) و (Δ) متقاطعان و عين تقاطعهما.

2) عين المعادلة الديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل كل من المستقيمين (D) و (Δ) .

3) احسب بعد النقطة $A(1;-1;0)$ عن المستقيم (D) .

4) عين تقاطع (D) مع المستوي $P(o;\vec{i};\vec{j})$.

تمرين24

نعتبر في الفضاء المزود بمعلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ المستويات (P_m) التي معادلاتها:

$2x + (m-1)y + 2mz + m - 2 = 0$. 1) برهن أنه من أجل كل قيمة للعدد الحقيقي m فإن (P_m) هو مستوي.

2) برهن أن جميع المستويات (P_m) تقبل مستقيما مشتركا (D)

يطلب إعطاء تمثيله الوسيطي .

3) أكتب معادلة المستوي (P_m) الذي يوازي المستقيم (Δ) ذو المعادلات : $\begin{cases} x = -2z + 1 \\ y = -z - 2 \end{cases}$

تمرين25

نعتبر المستقيم (D) و المستوي (P) حيث:

$$(P): x + 2y - z + 1 = 0 \text{ ، } (D):\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \; ; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

1)أكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) الذي يعامد (P) ويشمل (D) . 2) أكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (R) الذي يوازي (P) و يشمل $B(1;0;-1)$.

3) احسب المسافة بين النقطة B والمستوي (Q) .

تمرين26

في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقاط $A(3;0;0)$ ، $B(0;6;0)$ ، $C(0;0;4)$ ، $D(-5;0;1)$

1) أ – تحقق أن الشعاع $\vec{u}(4;2;3)$ ناظمي للمستوي (ABC) .

ب- أعط معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2) – أعط التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) العمودي على (ABC) و المار بالنقطة D . ب- استنتج إحداثيات النقطة H مسقط D

على المستوي (ABC) .

3) أ – عين تقاطع المستوي (ABC) مع المحورين (ox) و (oy) .

ب- عين تقاطع المستوي (ABC) مع المستوي (xoy) .

تمرين27

في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.نعتبر النقاط $A(1;2;3)$ ، $B(2;1;4)$ ، $C(1;0;2)$ و المستوي (P) ذو المعادلة $3x+y-2z+1=0$.

1) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) المار بالنقطتين A و B .

2) بين أن (D) محتوى في المستوى (P) .

3) ليكن (Q) المستوي المار من النقطة B و $\vec{v}(1;1;2)$ شعاع ناظمي له. أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) .

4) بين أن (P) و (Q) متعامدان و يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب إعطاء تمثيله الوسيطي.

5) لتكن H مسقط النقطة C على (Δ) .

احسب إحداثيات H و المسافة CH .

6) لتكن الكرة (S) ذات المركز C و نصف قطرها 2 .

أ- أكتب معادلة ديكارتية للكرة (S) .

ب – أدرس الوضعية النسبية لكل من (S) و (Q) .

تمرين28

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقاط $A(2;0;1)$ ، $B(1;-1;2)$ و الشعاع $\vec{u}(-1;-1;1)$

1) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) المار من النقطة A و شعاع توجيهه $\vec{u}$.

2) أكتب المعادلة الديكارتية للكرة (S) التي أحد أقطارها $[AB]$.

3) أوجد معادلة ديكارتية للمستوي (R) الماس للكرة (S) عند A .

تمرين 29

ليكن (D) مستقيم معرف بما يلي : $\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=-2+3\lambda \end{cases}$ مع $\lambda \in \mathbb{R}$

1) أكتب جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (D) .

2) ليكن (P) المستوي الذي معادلته : $3x-2y+z-2=0$.

عين تقاطع المستوي (P) والمستقيم (D) .

3) ليكن المستوي (Q) الذي معادلته : $2x-5y-3z+6=0$.

أ) بين أن (Q) يشمل (D) .   ب) أعطي تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يمثل تقاطع المستويين (P) و (Q) .

4) نعتبر الكرة (S) التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-4x=0$.

أدرس وضعية الكرة (S) بالنسبة إلى المستوي (P).

تمرين 30

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقاط : $A(-1;0;1)$ ، $B(1;1;0)$ ، $C(0;-1;-4)$ ، $D(-1;1;2)$.

1- أ) بين أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان .

ب) استنتج طبيعة المثلث ABC . جـ) احسب مساحة المثلث ABC

2- أ) عين الشعاع $\vec{u}$ حيث : $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{u}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

ب) استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

جـ) تحقق بأن النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (ABC) واستنتج طبيعة الرباعي $ABCD$. د) احسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC) . 3) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

4- أ) تحقق أن معادلة المستوي (BCD) هي : $2x-5y+2z+3=0$. ب) أحسب بعد النقطة A عن المستوي (BCD) . جـ) استنتج مساحة المثلث (BCD).

تمرين 31

نعتبر المكعب $ABCDEFGH$. الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.

1) احسب $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}$ واستنتج أن الشعاع $\overrightarrow{AG}$ عمودي على المستوي (BDE) .

2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (BDE) .

3) احسب المسافة بين النقطة H والمستوي (BDE)

4) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة H و يعامد المستوي (BDE).

تمرين 32

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. ليكن (P) المستوي الذي يشمل النقطة $B(1;-2;1)$ و $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي له والمستوي (Q) الذي معادلته الديكارتية : $x+2y-7=0$. 1) أثبت أن المستويين (P) و (Q) متعامدين

2) أثبت أن تقاطعهما هو المستقيم (D) الذي يشمل $C(-1;4;-1)$ وشعاع توجيه $\vec{u}(2;-1;1)$. 3) لتكن النقطة $A(5;-2;-1)$. احسب المسافة بين النقطة A وكل من المستويين (P) و (Q) .

4) استنتج حساب المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) .

تمرين 33

في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقط : $A(1;2;-3)$ ، $B(-3;1;4)$ ، $C(2;6;-1)$.

1) تحقق بأن النقاط A , B , C تعين مستوي (P) معادلته : $2x-y+z+3=0$. 2) لتكن ϖ النقطة التي إحداثياتها $\left(-1;\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل ϖ والعمودي على المستوي (ABC) .

3) نعتبر المجموعة (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء والتي تحقق ما يلي : $MA^2+MB^2=41$.

أ) تحقق بأن المجموعة (S) هي كرة مركزها ϖ ونصف قطرها 2 .

ب) احسب بعد ϖ عن المستوي (P) وادرس تقاطع (S) مع (P).

تمرين 34

في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط : $A(1;0;-1)$, $B(0;1;2)$, $C(1;-1;1)$, $D(1;1;0)$

والمستوي (P) ذو المعادلة : $2x-y+z-1=0$. أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في ما يأتي :

1) معادلة المستوي (ABC) هي : $x+y-2z+1=0$

2) معادلة المستوي (ABD) هي : $2x-y+z-1=0$

3) $ABCD$ هو رباعي الوجوه .

4) التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) هو : $\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$

5) المستقيم (AB) محتوى في المستوي ذو المعادلة : $-x+y+z+2=0$. 6) المستوي (Q) ذو المعادلة : $x+2y-z+1=0$ عمودي على المستوي (P) .

7) بعد النقطة A عن المستوي (P) هو 2 .

8) المستقيمان (AB) و (BC) متعامدان .

9) ABD هو مثلث متساوي الساقين . 10) إحداثيات النقطة H مسقط C على (ABD) هي : $H(0;-1;2)$

تمرين 35

في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقطتين $A(8;0;8)$ و $B(10;3;10)$ والمستقيم (D) المعرف كما يلي :

$$(D):\begin{cases} x=-5+3t \\ y=1+2t \quad , t\in\mathbb{R} \\ z=-2t \end{cases}$$

1- أ) أكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) الذي يشمل A و B .

ب) تحقق أن المستقيمين (D) و (Δ) ليس من نفس المستوي .

2) (P) هو المستوي الذي يوازي (D) ويشمل (Δ) .

أكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (P) وتحقق أن $\vec{u}(2;-2;1)$ هو شعاع ناظمي لـ (P). 3) (Q) يمثل مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء والتي تحقق $AM=BM$.

بين أن (Q) هو مستوي يطلب إعطاء معادلته الديكارتية .

4) (S) يمثل سطح كروي معرف بمعادلته الديكارتية :

$x^2+y^2+z^2-18x-3y-18z+160=0$.

بين أن تقاطع (S) و (P) هي دائرة طول قطرها AB .

حلــول التــمارين

حل التمرين1

1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times(-3)+1\times0+(-2)\times4=-14$

2) نعلم أن : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\vec{u};\vec{v})$ ولدينا :

$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=3$ و $\|\vec{v}\|=\sqrt{(-3)^2+0^2+4^2}=5$

ومنه : $\cos(\vec{u};\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = -\frac{14}{15}$.

3) ليكن $\vec{w}(a;b;c)$ شعاع من الفضاء . يكون الشعاع $\vec{w}$ عمودي على $\vec{u}$ و $\vec{v}$ إذا وفقط : $\vec{w}\cdot\vec{u}=0$ و $\vec{w}\cdot\vec{v}=0$ ومنه :

$\begin{cases}2a+b-2c=0\\-3a+4c=0\end{cases}$ هذه الجملة تقبل عدد غير منته من الحلول ،

بأخذ $a=4$ فإن $c=3$ و $b=-2$. إذن $\vec{w}(4\alpha;-2\alpha;3\alpha)$ مع $\alpha\in\mathbb{R}$. ومنه مجموعة الأشعة التي تعامد كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هي الأشعة التي توازي الشعاع $\vec{n}(4;-2;3)$.

حل التمرين2

1) $\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+0^2}=1$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=0$.

أيضا لدينا : $\vec{u}\cdot\vec{w}=0$ و $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$. بما أن :

$\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=\|\vec{w}\|=1$ و $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ و $\vec{u}\cdot\vec{w}=0$ و $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$

فإن $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ هو أساس متعامد ومتجانس .

2) $\vec{u}\cdot\vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot m+0\cdot(m+1)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(1+m)$

$\vec{u}\perp\vec{n}$ معناه $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$ ومنه $\frac{\sqrt{2}}{2}(m+1)=0$ ومنه $m=-1$

حل التمرين3

1) $\vec{AB}(2-\lambda;-2;-4)$, $\vec{AC}(1-\lambda;2;-3)$, $\vec{BC}(-1;4;1)$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=(2-\lambda)\cdot(1-\lambda)+(-2)\cdot(2)+(-4)\cdot(-3)$

$=\lambda^2-3\lambda+10$

$\vec{AB}\cdot\vec{BC}=(2-\lambda)\cdot(-1)+(-2)\cdot4+(-4)\cdot1=\lambda-14$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(1-\lambda)\cdot(-1)+2\cdot4+(-3)\cdot1=\lambda+4$$

2) يكون المثلث ABC قائم في C إذا تحقق : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

ومنه $\lambda+4=0$ و منه $\lambda=-4$.

3) أ - $A(-4;2;3)$, $B(2;0;-1)$, $C(1;4;0)$, $D(0;0;1)$

$\overrightarrow{AB}(6;-2;-4)$, $\overrightarrow{AC}(5;2;-3)$, $\overrightarrow{AD}(4;-2;-2)$.

تكون النقاط D , C , B , A من نفس المستوي إذا كانت الأشعة $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ من نفس المستوي أي إذا وجد عددين حقيقيين x,y يحققان: $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ ويكافئ :

الجملة المكونة من المعادلتين *
$$\begin{cases}6x+5y=4 & (1)\\ -2x+2y=-2 & (2)\\ -4x-3y=-2 & (3)\end{cases}$$

(2) و (3) تقبل كحل $x=\frac{5}{7}$ و $y=\frac{-2}{7}$ وهما لا يحققان (1)، إذن الجملة * ليست لها حل وبالتالي لا يوجد x و y يحققان $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ ومنه النقاط D , C , B , A لا تنتمي إلى نفس المستوي .

ب) نعلم أن : $x_G=\frac{2x_A+x_B-2x_C}{2+1-2}=-8$

$y_G=\frac{2y_A+y_B-2y_C}{2+1-2}=-4$ ، $z_G=\frac{2z_A+z_B-2z_C}{2+1-2}=5$

جـ) بما أن G هو مرجح الجملة $\{(A;2),(B;1),(C;-2)\}$ فإن :

$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}$ ومنه :

$\left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right)\cdot\overrightarrow{MD}=0$ يكافئ $\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MD}=0$

إذن المجموعة (E) مجموعة النقط M من الفضاء هي الكرة التي طرفاها $[GD]$. د) ليكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء ،

$M\in(E)$ يعني $\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MD}=0$ ونعلم أن :

$\overrightarrow{MG}(-8-x;-4-y;5-z)$ و $\overrightarrow{MD}(-x;-y;1-z)$

ومنه $\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MD}=0$ يكافئ :

$$(-8-x)(-x)+(-4-y)(-y)+(5-z)(1-z)=0$$

ومنه : $x^2+y^2+z^2+8x+4y-6z+5=0$ وهي المعادلة الديكارتية للمجموعة (E) .

حل التمرين4

1) الجملة $\{(C;2),(B;\alpha+2),(A;\alpha)\}$ تقبل مرجح إذا كان $\alpha+(\alpha+2)+2\neq0$ ومنه : $\alpha\neq-2$.

2) إذا كان $\alpha\neq-2$ فإن الجملة $\{(C;2),(B;\alpha+2),(A;\alpha)\}$ تقبل مرجح النقطة G المعرفة بالعلاقة الشعاعية الآتية :

$(E)\quad \alpha\overrightarrow{GA}+(\alpha+2)\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

لدينا : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ومنه $6\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

$6\overrightarrow{AG}=3\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}\right)+2\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}\right)$ ومنه :

$\overrightarrow{AG}-3\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ومنه $-\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

ومنه $\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

بالمطابقة مع العلاقة الشعاعية (E) نجد $\alpha=1$.

3) – أ لدينا الجملة $\{(A;2),(B;4),(C;2)\}$. نعلم أن مرجح النقطتين $A(2)$ و $C(2)$ المرفقتين بالمعاملين المتساوين هو النقطة I منتصف $[AC]$ و المرفق بمجموع المعاملين أي 4 . إذن مرجح الجملة $\{(A;2),(B;4),(C;2)\}$ هو النقطة G مرجح الجملة $\{(I;4),(B;4)\}$ وهو يقع في منتصف $[BI]$.

ب) تعيين مجموعة النقاط M من الفضاء .

لدينا $MB^2+MI^2=16$ و G منتصف $[BI]$ أي : $\overrightarrow{GB}=-\overrightarrow{GI}$

$$MB^2=(\overrightarrow{MB})^2=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2=(\overrightarrow{MG}-GI)^2$$

$$=\overrightarrow{MG}^2-2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GI}^2$$

$$MI^2=(\overrightarrow{MI})^2=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GI})^2=\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GI}^2$$

$$MB^2+MI^2=2\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{GI}^2=2MG^2+2GI^2=2MG^2+8$$

$MB^2+MI^2=2MG^2+8=16$. (لأن $GI=\frac{1}{2}BI=2$)

ومنه : $2\overrightarrow{MG}^2=8$ ومنه : $MG^2=4$. إذن مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $MB^2+MI^2=16$ هي الكرة التي مركزها G ونصف قطرها 2 .

حل التمرين5

I. 1) الجملة $\{(A;m),(B;m+1),(C;2m-1)\}$ تقبل مرجح إذا كان $m+(m+1)+(2m-1)\neq 0$ ومنه $4m\neq 0$ ومنه $m\neq 0$.

2) إنشاء G_1 مرجح $\{(A;1),(B;2),(C;1)\}$

<u>الطريقة الأولى:</u> ننشئ مرجح النقطتين $(A;1)$ و $(C;1)$ وهي النقطة H منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$ ثم ننشئ النقطة G_1 مرجح النقطتين $(H;2)$ و $(B;2)$ وهي تقع في منتصف $[BH]$

<u>الطريقة الثانية:</u>

النقطة G_1 مرجح الجملة $\{(A;1),(B;2),(C;1)\}$ هي معرفة بالعلاقة الشعاعية $\overrightarrow{G_1A}+2\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}=\vec{0}$ ومنه :

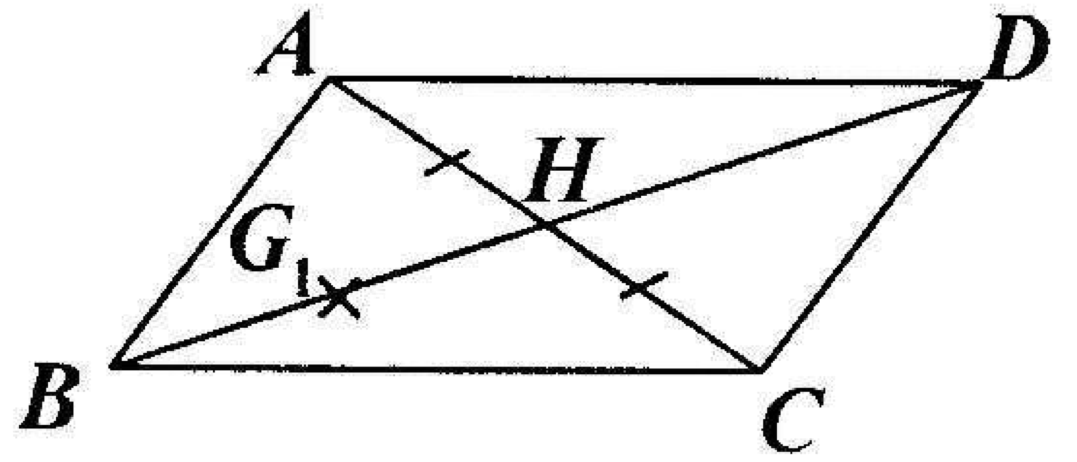
$(\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{BA})+2\overrightarrow{G_1B}+(\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{BC})=\vec{0}$ ومنه :

$4\overrightarrow{G_1B}+(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=\vec{0}$ ونعلم أن :

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$ (أنظر إلى الشكل)

ومنه $4\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}$ ومنه $4\overrightarrow{BG_1}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BH}$ ومنه :

$\overrightarrow{BG_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BH}$ وهذا يعني أن G_1 منتصف $[BH]$



- تعيين المجموعة E_1

3) لتكن النقطة F مرجح الجملة $\{(D;1),(B;3)\}$

ومنه : $3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MF}$ ونعلم أن :

$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG_1}$.

$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right\|$ يكافئ :

$4\overrightarrow{MG_1}=4\overrightarrow{MF}$ ومنه $\overrightarrow{MG_1}=\overrightarrow{MF}$ ، إذن المجموعة E_1 هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[G_1F]$.

- تعيين المجموعة E_2

$\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\cdot\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ يكافئ $4\overrightarrow{MG_1}\cdot\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

ومنه $\overrightarrow{MG_1}\cdot\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ ، إذن المجموعة E_2 هي الكرة التي قطرها $[G_1C]$.

II. 1- أ) لدينا $\overrightarrow{AB}(-2;0;0)$ و $\overrightarrow{BC}(1;-2;1)$ نلاحظ أنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{BC}=k\cdot\overrightarrow{AB}$ ومنه الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ غير مرتبطين خطيا إذن النقط A,B,C ليست على استقامة واحدة فهي تشكل مثلث . لدينا $\overrightarrow{AB}(-2;0;0)$ و $\overrightarrow{BC}(1;-2;1)$

و $\overrightarrow{AC}(-1;-2;1)$ ومنه $BC=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{6}$

$AC=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{6}$ ومنه المثلث ABC هو متساوي الساقين .

ب) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(-1)(1)+(-2)(-2)+1\cdot1=4$

ونعلم أن $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=AC\cdot BC\cdot\cos\widehat{ACB}$ ومنه

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\cdot\cos\widehat{ACB}=4$ ومنه :

$\cos\widehat{ACB}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ ومنه $\widehat{ACB}=48,2°$

$$\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)^2=\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2=6+8+6=20$$

$$\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{BC}^2=6-6=0$$

$$\left\|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right\|^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right)^2=\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2=$$

$$=6-8+6=4$$

2) تعيين المجموعة (Γ) . لدينا $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(-2)^2+0+0}=2$

و $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|4\overrightarrow{MG_1}\right\|=4MG_1$.

$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ يعني $4MG_1=2\times2=4$

ومنه $MG_1=1$. إذن المجموعة (Γ) هي الكرة التي مركزها G_1 ونصف قطرها 1 .

حل التمرين6

1) التمثيل الوسيطي للمستقيم (D_3)

لنكتب x و y بدلالة z (z وسيط) ، لدينا : $\begin{cases}x-y-2z=0\\2x+3y+5=5\end{cases}$

ومنه $\begin{cases} x-y=2z & (1)\\ 2x+3y=0 & (2)\end{cases}$ ومنه $(*)\begin{cases}-2x+2y=-4z\\ 2x+3y=0\end{cases}$

بجمع المعادلتين للجملة $(*)$ نجد : $5y=-4z$ ومنه $y=-\frac{4}{5}z$

وبالتعويض في المعادلة $x-y=2z$ نجد : $x=\frac{6}{5}z$ ، إذن التمثيل الوسيطي للمستقيم (D_3) هو معرف بـ : $\begin{cases} x=\frac{6}{5}\lambda\\ y=-\frac{4}{5}\lambda \\ z=\lambda\end{cases}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

2) إثبات أن المستقيمين (D_1) و (D_2) متطابقان

(D_1) موجه بالشعاع $\vec{u_1}(2;1;-1)$ و (D_2) موجه بالشعاع $\vec{u_2}(-4;-2;2)$. نلاحظ أن $\vec{u_2}=-2\vec{u_1}$ إذن (D_1) يوازي (D_2)

النقطة $A(1;-2;1)$ تنتمي إلى (D_1) $(t=0)$ وتنتمي إلى (D_2) $(t'=1)$ ، إذن (D_1) و (D_2) هما مستقيمان متوازيان ولهما النقطة A مشتركة فهما متطابقان .

3) إثبات أن المستقيمان (D_1) و (D_3) ليس من نفس المستوي

(D_1) موجه بالشعاع $\vec{u_1}(2;1;-1)$ و (D_3) موجه بالشعاع $\vec{u_3}\left(\frac{6}{5};\frac{-4}{5};1\right)$. الشعاعان $\vec{u_1}$ و $\vec{u_3}$ غير مرتبطان خطيا

وبالتالي (D_1) و (D_3) يكونا إما متقاطعان أوليس من نفس المستوي . لندرس تقاطع المستقيمين. $(D_1)\cap(D_3)$ معناه:

$\begin{cases}1+2t=\frac{6}{5}\lambda\\ -2+t=-\frac{4}{5}\lambda\\ 1-t=\lambda\end{cases}$ ومنه $(*)\begin{cases}2t-\frac{6}{5}\lambda=-1 & (1)\\ t+\frac{4}{5}\lambda=2 & (2)\\ -t-\lambda=-1 & (3)\end{cases}$

الجملة المكونة من المعادلتين (2) و (3) : $\begin{cases}t+\frac{4}{5}\lambda=2\\ -t-\lambda=-1\end{cases}$

تقبل الحل : $t=6$ و $\lambda=-5$ وهذا الحل لا يحقق المعادلة (1)، إذن الجملة $(*)$ ليست لها حل وبالتالي المستقيمان (D_1)و(D_3) غير متقاطعان . (D_1) و(D_3) غير متوازيان وغير متقاطعان فهما لا ينتميان إلى نفس المستوي .

4- لنعين التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) .

المستقيم (Δ) موجه بالشعاع $\vec{u}(3;1;1)$ ويمر بالنقطة $A(5;-1;4)$. $M(x;y;z)\in(\Delta)$ معناه : $\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}$

ومنه : $x-5=3\alpha$ و $y+1=\alpha$ و $z-4=\alpha$ ومنه :

($x=5+3\alpha$ و $y=-1+\alpha$ و $z=4+\alpha$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$)

وهذه المعادلات الثلاثة تعبر عن التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ).

إثبات أن المستقيم (D_1) يقطع (Δ)

نلاحظ أن الشعاعين $\vec{u_1}(2;1;-1)$ و $\vec{u}(3;1;1)$ للمستقيمين (D_1) و (Δ) غير مرتبطين خطيا لأن $\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{3}{2}$ ، إذن (D_1) و (Δ) هما إما متقاطعان وإما ليس من نفس المستوي .

لندرس تقاطع (D_1) و (Δ) . $(D_1)\cap(\Delta)$ يعني :

$$\begin{cases} 1+2t=5+3\alpha \\ -2+t=-1+\alpha \\ 1-t=4+\alpha \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad (*)\begin{cases} 2t-3\alpha=4 & (1) \\ t-\alpha=1 & (2) \\ -t-\alpha=3 & (3) \end{cases}$$

الجملة المكونة من المعادلتين (2) و (3) تقبل كحل $\alpha=-2$ و $t=-1$ وهذا الحل يحقق المعادلة (1) . إذن الجملة $*$ تقبل حل وحيد $\alpha=-2$ و $t=-1$ وهذا يعني أن المستقيمان (D_1) و (Δ) متقاطعان في نقطة وحيدة . لتعيين إحداثيات نقطة تقاطع (D_1) و (Δ) نعوض $\alpha=-2$ في المعادلات للتمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) نجد : $x=-1$, $y=-3$, $z=2$

إذن $(D_1)\cap(\Delta)=\{I\}$ حيث : $I(-1;-3;2)$

حل التمرين7

1) لدينا $\overrightarrow{AB}(-2;2;2)$ ، $\overrightarrow{AC}(2;-1;-4)$. الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا لأن $\frac{2}{-1} \neq \frac{-2}{2}$ ومنه النقاط

C,B,A ليست على استقامة واحدة

2) $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=3(-2)+2\cdot2+1\cdot2=0$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=3(2)+2\cdot(-1)+1\cdot(-4)=0$.

ومنه $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$ ، فالشعاع $\vec{n}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا ومن نفس المستوي (ABC) فهو شعاع ناظمي لهذا المستوي .

3) $M(x;y;z)$ نقطة من المستوي (ABC) يعني : $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ ومنه $3(x+1)+2(y-0)+(z-2)=0$ ومنه $3x+2y+z+1=0$ وهي معادلة المستوي (ABC) .

4) بما ان المستوي (Q) يوازي المستوي (ABC) فيكون $\vec{n}(3;2;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (Q) .

$D(2;3;-1)$ نقطة من المستوي (Q) يعني أن : $\vec{n}\perp\overrightarrow{DM}$ ومنه $\vec{n}\cdot\overrightarrow{DM}=0$ ومنه $3(x-2)+2(y-3)+(z+1)=0$ ومنه $3x+2y+z-11=0$ وهي معادلة المستوي (Q) .

حل التمرين8

1) المعادلات الوسيطية للمستقيم (D) :

$M(x;y;z)$ نقطة من المستقيم (D) يعني $\overrightarrow{CM}$ يوازي $\vec{u}$

ومنه يوجد عدد حقيقي λ بحيث : $\overrightarrow{CM}=\lambda\vec{u}$ ومنه :

$$\begin{cases} x-2=\lambda \\ y+1=2\lambda \\ z-1=-\lambda \end{cases}$$ ومنه $$\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases}$$ مع $\lambda\in\mathbb{R}$

2) المعادلات الوسيطية للمستقيم (AB) : لدينا $\overrightarrow{AB}(1;1,9)$ وهو شعاع التوجيه للمستقيم (AB). $M(x;y;z)\in(AB)$ يعني يوجد عدد حقيقي t بحيث : $\overrightarrow{AM}=t\cdot\overrightarrow{AB}$ ومنه :

$$\begin{cases} x-1=t \\ y+1=t \\ z+4=9t \end{cases}$$ ومنه $$\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+t \\ z=-4+9t \end{cases}$$ مع $t\in\mathbb{R}$

3) يكون المستقيم (AB) محتوى في المستوي (P) ذو المعادلة : $5x+4y-z-5=0$ إذا كانت نقاط المستقيم (AB) هي ضمن المستوي (P). بتعويض z,y,x بدلالة الوسيط t في معادلة المستوي (P) نجد :

$5(1+t)+4(-1+t)-(-4+9t)-5=0$ ومنه $0=0$.

إذن إحداثيات جميع نقاط المستقيم (AB) تحقق معادلة (P) وهذا يعني أن المستقيم (AB) محتوى في المستوي (P) .

4) $(D)\cap(P)$ يعني :
$$\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=1-\lambda \\ 5x+4y-z-5=0 \end{cases}$$

ومنه :
$$(*)\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=1-\lambda \\ 5(2+\lambda)+4(-1+2\lambda)-(1-\lambda)-5=0 \end{cases}$$

من المعادلة الأخيرة للجملة $(*)$ نستنتج أن $\lambda=0$ وبتعويض λ في المعادلات للتمثيل الوسيطي للمستقيم (D) نجد :

$x=2, y=-1, z=1$. إذن المستقيم (D) يقطع المستوي (P) في النقطة $I(2;-1;1)$.

حل التمرين9

1) المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ هو المستوي العمودي على (AB) في النقطة I منتصف $[AB]$.

إذن الشعاع $\overrightarrow{AB}$ يعتبر شعاع ناظمي لهذا المستوي .

لدينا $\overrightarrow{AB}(4;-4;2)$ و $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

أي : $I(1;0;2)$. $M(x;y;z)$ نقطة من هذا المستوي المحوري يعني : $\overrightarrow{IM}\perp\overrightarrow{AB}$ ومنه $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ ومنه :

$4(x-1)-4(y-0)+2(z-2)=0$ ومنه

$4x-4y+2z-8=0$ أو $2x-2y+z-4=0$

وهي معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

2) يكون (P_m) ذو المعادلة $(m+1)x+my-2z+m-1=0$

يوازي المستوي (Q) ذو المعادلة $2x+y-2z+3=0$ إذا تحقق ما يلي : $\frac{m+1}{2}=\frac{m}{1}=\frac{2}{2}$. نلاحظ أن إذا كان $m=1$ ، فالمساواة السابقة محققة . إذن إذا كان $m=1$ فالمستوي (P_m) يوازي المستوي (Q) . من أجل $m=1$ تكون معادلة المستوي (P_1) هي : $2x+y-2z=0$. بما أن $\frac{2}{2}=\frac{1}{1}=\frac{-2}{-2}\neq\frac{0}{3}$ فالمستويين (P_m) و (Q) لا يمكن أن يكونا متطابقين .

ب) المستوي (P_m) يعامد المستوي (R) ذو المعادلة $3x+2y-z+1=0$ إذا كان الشعاعين الناظمين $\vec{n}(m+1;m;-2)$ و $\vec{n'}(3;2;-1)$ متعامدين ومنه : $3(m+1)+2m+(-1)(-2)=0$ ومنه $m=-1$.

حل التمرين10

1) – أ المستقيم (Δ) هومعرف بجملة معادلتين ديكارتيتين للمستويين (P) و(R) :

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ -x+y+2z+1=0 \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} x+y=z & (1) \\ -x+y=-2z-1 & (2) \end{cases}$$

بجمع المعادلتين (1)و (2)نجد $2y=-z-1$ ومنه $y=-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}$ وبالتعويض في (1) نجد :

$x=\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}$. ويكون التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) هو : $(x=\frac{3}{2}\lambda+\frac{1}{2}$ و $y=-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}$ و $z=\lambda$ مع $\lambda\in\mathbb{R})$.

ب) من التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ)نستنتج $\vec{u}\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2};1\right)$ شعاع التوجيه للمستقيم (Δ) .

2) المعادلة الديكارتية للمستوي (π) : بما أن المستوي (π)يعامد كل من المستويين (P) و(R) فإن $\vec{n}$ شعاع ناظمي له يعامد كل من الشعاعين الناظمين للمستويين (P) و(R) .

لدينا : $\vec{n}(a;b;c)$ و $\vec{n_P}(1;1;-1)$ و $\vec{n_R}(-1;1;2)$.

$\vec{n}\perp\vec{n_P}$ و $\vec{n}\perp\vec{n_R}$ يعني : $\vec{n}\cdot\vec{n_P}=0$ و $\vec{n}\cdot\vec{n_R}=0$ ومنه :

$$\begin{cases} a+b-c=0 \\ -a+b+2c=0 \end{cases}$$ ومنه بجمع المعادلتين $$\begin{cases} a+b-c=0 \\ 2b+c=0 \end{cases}$$

بوضع $b=1$ فإن $c=-2$ و $a=-3$.

إذن $\vec{n}(-3;1;-2)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (π) .

$M(x;y;z)\in(\pi)$ يعني $\vec{n}\perp\vec{AM}$ ومنه $\vec{n}\cdot\vec{AM}=0$ ومنه

$-3(x-1)+1(y-0)+(-2)(z-0)=0$ ومنه :

$-3x+y-2z+3=0$ وهي معادلة المستوي (π) .

3) $M(x;y;z)\in(\pi)\cap(\Delta)$ يعني :

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} \\ z = \lambda \end{cases}$$ و $-3x + y - 2z + 3 = 0$.

بتعويض x, y, z بدلالة λ في المعادلة $-3x + y - 2z + 3 = 0$

نجد : $-3\left(\frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\right) - 2\lambda + 3 = 0$

من هذه المعادلة نستنتج أن : $\lambda = \frac{1}{7}$ وبالتعويض قيمة λ في المعادلات للتمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) نجد :

$x = \frac{5}{7}$, $y = -\frac{4}{7}$, $z = \frac{1}{7}$.

إذن (Δ) يقطع المستوي (π) في النقطة $I\left(\frac{5}{7}; -\frac{4}{7}; \frac{1}{7}\right)$.

حل التمرين 11

1) الكرة التي مركزها ϖ وتشمل النقطة A يكون نصف قطرها ϖA =

$$\varpi A = \sqrt{(x_A - x_\varpi)^2 + (y_A - y_\varpi)^2 + (z_A - z_\varpi)^2}$$

$$= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

نعلم أن معادلة الكرة (S) التي مركزها ϖ ونصف قطرها R

هي : $(x - x_\varpi)^2 + (y - y_\varpi)^2 + (z - z_\varpi)^2 = R^2$ ، إذن معادلة الكرة (S) هي : $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 21$ ومنه :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 15 = 0$.

2) المستوي (P) يمس الكرة (S) في النقطة A يعني $\overrightarrow{\varpi A} \perp (P)$ ، إذن $\overrightarrow{\varpi A}(1;-2;4)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P) وتكون معادلة المستوي (P) هي من الشكل :

$x - 2y + 4z + k = 0$ وبما أن المستوي (P) يشمل $A(2;0;3)$ فإن $2 - 2\times 0 + 4\times 3 + k = 0$ ومنه $k + 14 = 0$ ومنه $k = -14$.

وتكون معادلة المستوي (P) هي : $x - 2y + 4z - 14 = 0$.

3) $x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$ ومنه $x^2 + y^2 + z^2 = 25 = 5^2$ وهي تمثل معادلة الكرة (S') التي مركزها $O(0;0;0)$ ونصف قطرها 5 .

المسافة بين النقطة O والمستوي (π) هي :

$$d(O;(P)) = \frac{|0\times 1 + 2\times 0 + 2\times 0 + 15|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{15}{3} = 5 \text{ .}$$

بما ان المسافة بين مركز الكرة (S') والمستوي (π) تساوي نصف قطر الكرة (S') فالمستوي (π) يمس الكرة (S') في النقطة H .

النقطة H نقطة تقاطع (S') والمستوي (π) هي المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (π) أي نقطة تقاطع المستقيم (OH) و (π) . بما أن المستقيم (OH) عمودي على (π) فيكون $\vec{n}(1;2;2)$ شعاع ناظمي للمستوي (π) هو شعاع التوجيه له ويكون التمثيل الوسيطي للمستقيم (OH) الذي يمر بالنقطة O

وشعاعه التوجيه $\vec{n}(1;2;2)$ هو : $\begin{cases} x=\lambda \\ y=2\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$ مع $\lambda \in \mathbb{R}$

$(OH)\cap(\pi)=\{H\}$ يعني :

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=2\lambda \\ z=2\lambda \\ x+2y+2z+15=0 \end{cases}$$ ومنه $$\begin{cases} x=\lambda \\ y=2\lambda \\ z=2\lambda \\ \lambda+4\lambda+4\lambda+15=0 \end{cases}(*)$$

من الجملة $(*)$ نستنتج $\lambda=-\frac{5}{3}$ وبتعويض λ في المعادلات للتمثيل الوسيطي لـ (OH) نجد : $x=-5/3,\ y=-10/3,\ z=-10/3$

ومنه $H\left(-5/3;-10/3;-10/3\right)$.

حل التمرين12

1) لدينا $\overrightarrow{AB}(2;-2;1)$. $M(x;y;z)$ نقطة من المستقيم (AB) معناه يوجد عدد حقيقي λ بحيث : $\overrightarrow{AM}=\lambda\cdot\overrightarrow{AB}$ ومنه :

$\begin{cases} x=2\lambda-1 \\ y=-2+2\lambda \\ z=\lambda-1 \end{cases}$ مع $\lambda \in \mathbb{R}$. وهو التمثيل الوسيطي لـ (AB)

2) النقاط A, B, ϖ ليست على استقامة واحدة لأن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{B\varpi}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي فهي تشكل مستوي

$(AB\varpi)$. الشعاع $\vec{n}$ ناظمي للمستوي $(AB\varpi)$ هو الشعاع الذي يعامد الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{B\varpi}$ أي $\vec{n}(a;b;c)\perp\overrightarrow{AB}(2;-2;1)$ و $\vec{n}(a;b;c)\perp\overrightarrow{B\varpi}(1;1;0)$ ومنه $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}\cdot\overrightarrow{B\varpi}=0$

ومنه $\begin{cases} 2a-2b+c=0 \\ a+b=0 \end{cases}$ بأخذ $a=1$ فإن $b=-1$ و $c=-4$

ومنه $\vec{n}(1;-1;-4)$ وتكون معادلة المستوي $(AB\varpi)$ من الشكل : $x-y-4z+k=0$ وبما أن المستوي يشمل $B(1;0;0)$ فإن : $1-0-4\times0+k=0$ ومنه $k=-1$.

إذن معادلة المستوي $(AB\varpi)$ هي : $x-y-4z-1=0$.

3) – أ لدينا معادلة (S) : $x^2+y^2+z^2-4x-2y-1=0$

ومنه $(x-2)^2-4+(y-1)^2-1+z^2-1=0$ و منه :

$(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=6$ وهي تمثل معادلة كرة مركزها النقطة $\varpi(2;1;0)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

ب) بما أن ϖ مركز الكرة ينتمي إلى المستوي $(AB\varpi)$ فإن الكرة (S) والمستوي $(AB\varpi)$ يتقاطعان حسب الدائرة الكبيرة في الكرة أي الدائرة التي مركزها ϖ ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

جـ) $(S)\cap(AB)$ يعني :

$$(*)\begin{cases} x=2\lambda-1 & (1)\\ y=-2\lambda+2 & (2)\\ z=\lambda-1 & (3)\\ x^2+y^2+z^2-4x-2y-1=0 & (4)\end{cases}$$

بتعويض $x=2\lambda-1$ و $y=-2\lambda+2$ و $z=\lambda-1$ في المعادلة (4) وبعد تبسيطها نجد : $9\lambda^2-18\lambda+5=0$ ومنه :

$\lambda_1=\frac{5}{3}$ و $\lambda_2=\frac{1}{3}$.إذن المستقيم (AB) يقطع الكرة (S) في النقطتين $E\left(\frac{7}{3};-\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$ و $F\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right)$

(إحداثيات النقطتين E و F يتم حسابهما بتعويض λ بالقيمتين λ_1 و λ_2 في التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB)) .

حل التمرين13

1) بما أن المستقيم (D) عمودي على المستوي (P) فيكون شعاعه التوجيه هو $\vec{n}(1;-2;3)$ شعاع ناظمي المستوي (P).

إذن المستقيم (D) موجه بالشعاع $\vec{n}(1;-2;3)$ ويمر بالنقطة $A(-3;5;1)$. $M(x;y,z)\in(D)$ يعني $\overrightarrow{AM}$ يوازي $\vec{n}$

ومنه يوجد عدد حقيقي λ بحيث : $\overrightarrow{AM}=\lambda\cdot\vec{n}$ ومنه :

$$\begin{cases} x+3=\lambda\\ y-5=-2\lambda\\ z-1=3\lambda\end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} x=-3+\lambda\\ y=5-2\lambda\\ z=1+3\lambda\end{cases} \text{ مع } \lambda\in\mathbb{R}$$

وهذه الجملة تعبر عن التمثيل الوسيطي للمستقيم (D)

2) $(D)\cap(\Delta)$ يعني :

$$\begin{cases} -3+\lambda=t-1\\ 5-2\lambda=-2t+1\\ 1+3\lambda=2t+5\end{cases} \text{ ومنه } (*)\begin{cases} \lambda-t=2 & (1)\\ -2\lambda+2t=-4 & (2)\\ 3\lambda-2t=4 & (3)\end{cases}$$

الجملة المكونة من المعادلتين (2) و (3) تقبل كحل $\lambda=0$ و $t=-2$ ونلاحظ أن هذا الحل يحقق أيضا المعادلة (1) ، إذن فهو حل للجملة $(*)$. بما أن الجملة $(*)$ تقبل حل وحيد فالمستقيمين (D) و (Δ) يتقاطعان في نقطة وحيدة . لتعيين إحداثيات نقطة تقاطع نعوض $\lambda=0$ في المعادلات للتمثيل الوسيطي لـ (D) نجد

$x=-3$, $y=5$, $z=1$.

3) $(D)\cap P(O;\vec{i};\vec{j})$ يعني :

$$\begin{cases} x=-3+\lambda\\ y=5-2\lambda\\ z=1+3\lambda\\ z=0\end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} x=-3+\lambda\\ y=5-2\lambda\\ \lambda=-\frac{1}{3}\\ z=0\end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} x=-\frac{10}{3}\\ y=\frac{17}{3}\\ z=0\end{cases}$$

المستقيم (D) يقطع المستوي $P(o;\vec{i};\vec{j})$ في $I\left(-\frac{10}{3};\frac{17}{3};0\right)$.

حل التمرين14

1) المستقيم (D) موجه بالشعاع $\vec{u}(0;-1;-2)$

والمستقيم (D') هوموجه بالشعاع $\vec{u'}(-5;-2;2)$. نلاحظ أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ غير مرتبطين خطيا لأن $\frac{-2}{2} \neq \frac{-1}{-2} \neq \frac{0}{-5}$ إذن (D) و (D') هما إما متقاطعان وإما لا ينتميان إلى نفس المستوي .

$(D)\cap(D')$ يعني : $\begin{cases} -1 = 4-5t' \\ 1-t = 3-2t' \\ 1-2t = -1+2t' \end{cases}$ ومنه $t'=1$ و $t=0$.

بما أن الجملة تقبل حل وحيد فالمستقيمان (D) و (D') يتقاطعان في نقطة وحيدة . بتعويض $t=0$ في المعادلات للتمثيل الوسيطي للمستقيم (D) نجد : $z=1$, $y=1$, $x=-1$.

إذن $(D)\cap(D')=\{I\}$ حيث : $I(-1;1;1)$.

2) لدينا $\vec{u}(0;-1;-2)$ و $\vec{u'}(-5;-2;2)$ شعاعي التوجيه للمستقيمين (D) و (D') . $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (P) الذي يشمل المستقيمين (D) و (D') يعامد كل من الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{u'}$

ومنه $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ و $\vec{n}\cdot\vec{u'}=0$. ليكن $\vec{n}(a;b;c)$ ومنه :

$\begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{u} = -b-2c = 0 \\ \vec{n}\cdot\vec{u'} = -5a-2b+2c = 0 \end{cases}$ بأخذ $c=5$ فإن :

$b=-10$ و $a=6$

ومنه $\vec{n}(6;-10;5)$. المستوي (P) يشمل النقطة $I(-1;1;1)$ تقاطع (D) و (D') و $\vec{n}(6;-10;5)$ شعاع ناظمي له .

$M(x;y;z)$ نقطة من المستوي (P) يعني $\vec{n}\cdot\overrightarrow{IM}=0$ ومنه

$6(x+1)+(-10)(y-1)+5(z-1)=0$ ومنه

$6x-10y+5z+11=0$ وهي معادلة المستوي (P).

3) $\vec{u'}(-5;-2;2)$ شعاع التوجيه للمستقيم (D') و $\vec{n}(2;-2;3)$ شعاع ناظمي للمستوي (Q).

$\vec{n}\cdot\vec{u'}=2(-5)+(-2)(-2)+3\times 2=0$ ومنه $\vec{n}\perp\vec{u'}$ وهذا يعني أن المستقيم (D') يوازي المستوي (Q) .

حل التمرين15

1) $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 2x-y=-3z \\ x-y=-2z+1 \end{cases}$ ومنه

$(*)\begin{cases} 2x-y=-3z \\ -x+y=2z-1 \end{cases}$ بجمع المعادلتين للجملة $(*)$ نجد

$x=-z-1$ وبالتعويض في المعادلة $x-y=-2z+1$ نجد

$y=z-2$. بوضع $z=\lambda$ نحصل على التمثيل الوسيطي

للمستقيم (D') وهو معرف بـ : $\lambda\in\mathbb{R}$, $(D'):\begin{cases} x=-\lambda-1 \\ y=\lambda-2 \\ z=\lambda \end{cases}$.

$\vec{u}(-1;1;1)$ هو شعاع التوجيه للمستقيم (D) وهو أيضا شعاع التوجيه للمستقيم (D') وهذا يعني أن المستقيمين (D) و (D') هما متوازيان . من أجل $t=0$ لدينا النقطة $B(3;2;0)$ هي نقطة من المستقيم (D) وهذه النقطة لا تنتمي إلى المستقيم (D') لأن لا توجد قيمة لـ λ تحقق : $3=1-\lambda$ − و $2=2-\lambda$ و $0=\lambda$ ومنه المستقيمان (D) و (D') هما متوازيان تماما .

2) H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) الموجه بالشعاع $\vec{u}$ يعني أن $\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}$ و $H\in(D)$ ومنه $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AH}=0$

لدينا $\overrightarrow{AH}(x_H-1;y_H-2;z_H+1)$ و $\vec{u}(-1;1;1)$ ومنه

$$(*)\begin{cases}-(x_H-1)+(y_H-2)+(z_H+1)=0 & (1)\\ x_H=-t+3\\ y_H=t+2\\ z_H=t\end{cases}$$

وبتعويض x_H, y_H, z_H بدلالة t في المعادلة (1) للجملة $(*)$ نجد $-(-t+2)+(t)+(t+1)=0$ ومنه $3t-1=0$ ومنه $t=\frac{1}{3}$ وبتعويض قيمة t في كل من x_H, y_H, z_H نجد :

$z_H=\frac{1}{3}$, $y_H=\frac{7}{3}$, $x_H=\frac{8}{3}$ إذن $H\left(\frac{8}{3};\frac{7}{3};\frac{1}{3}\right)$.

المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) هي AH

$$AH=\sqrt{(x_H-x_A)^2+(y_H-y_A)^2+(z_H-z_A)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{42}}{3}$$

حل التمرين16

1) $(P)\cap(Ox)$ يعني : $\begin{cases}2x+y-3z-5=0\\ y=z=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}x=\frac{5}{2}\\ y=z=0\end{cases}$ ومنه (P) يقطع (Ox) في النقطة $\left(\frac{5}{2};0;0\right)$

$(P)\cap(Oy)$ يعني $\begin{cases}2x+y-3z-5=0\\ x=z=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}y=5\\ x=z=0\end{cases}$

المستوي (P) يقطع (Oy) في النقطة $(0;5;0)$

$(P)\cap(Oz)$ يعني $\begin{cases}2x+y-3z-5=0\\ x=y=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}z=-\frac{5}{3}\\ x=y=0\end{cases}$

المستوي (P) يقطع (Oz) في النقطة $\left(0;0;-\frac{5}{3}\right)$

2- أ) $\vec{u}(1;3;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (Q) و $\vec{v}(-2;5;9)$ شعاع ناظمي للمستوي (R) . الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا وهذا يعني أن المستويين (Q) و (R) متقاطعان وفق المستقيم (D) المعرف بجملة المعادلتين الديكارتيتين :

$$\begin{cases} x+3y+z-10=0 \\ -2x+5y+9z-13=0 \end{cases}$$

لتعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) ، نأخذ z كوسيط ونعبر عن x و y بدلالة z أي نحل الجملة ذات المجهولين x و y :

$$\begin{cases} x+3y=-z+10 \\ -2x+5y=-9z+13 \end{cases}$$ ومنه $$\begin{cases} 2x+6y=-2z+20 \\ -2x+5y=-9z+13 \end{cases} (*)$$

بجمع المعادلتين للجملة $(*)$ نجد : $11y=-11z+33$ ومنه :
$y=-z+3$ وبالتعويض في المعادلة $x+3y=-z+10$ نجد :
$x=2z+1$ ويكون التمثيل الوسيطي لـ (D) معرف بالجملة :

$$\begin{cases} x=2\lambda+1 \\ y=-\lambda+3 \\ z=\lambda \end{cases}$$ مع $\lambda\in\mathbb{R}$. من التمثيل الوسيطي لـ (D)

نستنتج أن شعاع التوجيه المستقيم (D) هو $\vec{u}(2;-1;1)$.
بوضع $\lambda=0$ نعين النقطة $E(1;3;0)$ من المستقيم (D) .

ب) لدينا $(P): 2x+y-3z-5=0$ و $(D)\begin{cases} x=2\lambda+1 \\ y=-\lambda+3 \\ z=\lambda \end{cases}$

بتعويض x,y,z بدلالة λ في معادلة المستوي (P) نجد :
$2(2\lambda+1)+(-\lambda+3)-3\lambda-5=0$ وبعد التبسيط نجد : $0=0$
وهذا يعني أن إحداثيات جميع نقاط المستقيم (D) تحقق معادلة

المستوي (P) ، إذن (D) هو ضمن المستوي (P) .

جـ) التفسير الهندسي لحل الجملة.

$$\begin{cases} 2x+y-3z-5=0 & (1) \\ -2x+5y+9z-13=0 & (2) \\ x+3y+z-10=0 & (3) \end{cases}$$

الحل لهذه الجملة يمثل تقاطع المستويات الثلاثة : $(P),(R),(Q)$
حسب السؤال 2- أ) تقاطع المستويين (R) و (Q) هو المستقيم (D) وحسب السؤال 2- ب) المستقيم (D) هو محتوى في (P) ، إذن المستقيم (D) هو مشترك بين المستويات : $(Q),(R),(P)$. التفسير الهندسي للحل للجملة المذكورة هو أن المستويات $(Q),(R),(P)$ تتقاطع وفق المستقيم (D) .

حل التمرين17

1) لدينا $\overrightarrow{AB}(1;2;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(-3;-2;1)$ نلاحظ أن $\frac{2}{-2}\neq\frac{1}{-3}$ ، إذن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه النقاط A,B,C ليست استقامية . لدينا $(P): y+2z-2=0$

بما أن : $2\times0+1\times0+1\times2-2=0$ فإن $A\in(P)$

بما أن : $3\times0+2\times1+0\times2-2=0$ فإن $B\in(P)$

بما أن : $-1\times0+(-2)\times1+2\times2-2=0$ فإن $C\in(P)$ ،

إذن معادلة المستوي (P) هي : $y+2z-2=0$.

2) – أ) $x_G=\frac{-2x_A+x_B+2x_C}{-2+1+2}=-3$ ،

$y_G=\frac{-2y_A+y_B+2y_C}{-2+1+2}=-2$ ، $z_G=2$.

إذن $G(-3;-2;2)$. ب) نعلم أن :

$$-2MA^2+MB^2+2MC^2=$$
$$=(-2+1+2)MG^2-2GA^2+GB^2+2GC^2=$$
$$=MG^2-2GA^2+GB^2+2GC^2$$
$$GA^2=(x_A-x_G)^2+(y_A-y_G)^2+(z_A-z_G)^2=30$$
$$GB^2=(x_B-x_G)^2+(y_B-y_G)^2+(z_B-z_G)^2=56$$
$$GC^2=(x_C-x_G)^2+(y_C-y_G)^2+(z_C-z_G)^2=4$$
$$MG^2-2GA^2+GB^2+2GC^2=MG^2-60+56+8=13$$

ومنه : $MG^2=9=3^2$ ، إذن مجموعة النقط M من الفضاء المطلوبة هي الكرة (S) التي مركزها G ونصف قطرها 3 .

جـ) $I(0;-2;2)$ تنتمي إلى الكرة (S) إذا كان $GI=R=3$.

$$GI=\sqrt{(x_I-x_G)^2+(y_I-y_G)^2+(z_I-z_G)^2}$$

$GI=\sqrt{3^2+0^2+0^2}=3$ ومنه $I\in(S)$

المستوي (R) مماس للكرة (S) التي مركزها G عند النقطة I

يعني أن الشعاع $\overrightarrow{GI}(3;0;0)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (R).

$M(x;y;z)\in(R)$ معناه $\overrightarrow{IM}\perp\overrightarrow{GI}$ ومنه $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{GI}=0$

ومنه $3(x-0)+0\times(y+2)+0\times(z-2)=0$ ومنه

$3x=0$ ومنه $x=0$ وهي معادلة المستوي (R).

3) $(R)\cap(ABC)$ يعني :

$$\begin{cases}x=0\\y+2z-2=0\end{cases}$$ ومنه $$\begin{cases}x=0\\y=-2z-2\end{cases}$$

وهذه الجملة المكونة من معادلتين ديكارتيتين تمثل المستقيم (D).

إذن المستويين (R) و (ABC) يتقاطعان وفق المستقيم (D).

حل التمرين18

1) المستوي (P) هو : (ABC) لأن إحداثيات النقط C,B,A تحقق معادلة المستوي (P).

2) شعاع التوجيه للمستقيم (Δ) هو $\vec{u}(2;1;1)$ لأن التمثيل الوسيطي لـ (Δ) يظهر شعاعه التوجيه .

3) المستقيم (Δ) يقطع (P) لأن $\vec{n}(1;-1;2)$ شعاع ناظمي لمستوي (P) و $\vec{u}(2;1;1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) غير متعامدان $(\vec{u}\cdot\vec{n}\neq 0)$ وهذا يعني أن المستقيم (Δ) لا يوازي المستوي (P) إذن فهو يقطعه .

4) A تنتمي إلى (P) لأن إحداثيات A تحقق معادلة (P).

5) المسافة بين النقطة D والمستوي (P) هي : $\frac{\sqrt{6}}{3}$ لأن :

$$d\left(D;(P)\right)=\frac{\left|-1-2+2-1\right|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\ .$$

6) المستقيم (Δ) يقطع (P) في النقطة ذات الإحداثيات $\left(\frac{1}{3};\frac{8}{3};\frac{5}{3}\right)$

لأن إحداثيات هذه النقطة تحقق معادلة (P) فهي تنتمي إلى (P) ،

ومن أجل $\lambda=\frac{2}{3}$ لدينا $\left(\frac{1}{3};\frac{8}{3};\frac{5}{3}\right)$ نقطة من (Δ) ، إذن النقطة

$\left(\frac{1}{3};\frac{8}{3};\frac{5}{3}\right)$ هي نقطة مشتركة بين (Δ) و (P) فهي نقطة تقاطع .

حل التمرين19

1) النقاط C,B,A ليست على استقامة واحدة فهي تشكل مستوي

$A(1;0;3)\in(ABC)$ لأن : $1+2\times0+2\times3-7=0$.

$B(1;3;0)\in(ABC)$ لأن : $1+2\times3+2\times0-7=0$.

$C(3;1;1)\in(ABC)$ لأن : $3+2\times1+2\times1-7=0$.

إذن معادلة المستوي (ABC) هي : $x+2y+2z-7=0$.

2- أ) $\vec{n}(1;2;2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) و $\vec{v}(2;-2;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (Q). $\vec{n}\cdot\vec{v}=1\times2+2(-2)+1\times2=0$

ومنه : $\vec{n}\perp\vec{v}$ وهذا يعني أن المستويين (ABC) و (Q) متعامدين.

ب) المستقيم (D) الذي هو تقاطع المستويين (Q) و (ABC) هو

معرف بجملة معادلتين ديكارتيتين : $\begin{cases}x+2y+2z-7=0\\2x-2y+z-5=0\end{cases}$

لتعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم (D)، نعتبر z وسيط ونعبر عن x و y بدلالة z أي نحل الجملة ذات المجهولين x و y :

$\begin{cases}x+2y=-2z+7 & (1)\\2x-2y=-z+5 & (2)\end{cases}$ بجمع المعادلتين (1) و (2) نجد :

$3x=-3z+12$ ومنه $x=-z+4$ وبتعويض في (1) نجد :

$y=-\frac{1}{2}z+\frac{3}{2}$. ومنه : $\begin{cases}x=-\lambda+4\\y=-\frac{1}{2}\lambda+\frac{3}{2}\\z=\lambda\end{cases}$ مع $\lambda\in\mathbb{R}$

جـ) $d\left(D;(Q)\right)=\frac{\left|2\times2-2(-1)+1-5\right|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{2}{3}$

حل التمرين20

توجد عدة طرق لحل الجملة الآتية : $\begin{cases}2x+y-z=5 & (1)\\-3x+2y-1=0 & (2)\\x-3y+2z=-4 & (3)\end{cases}$

<u>الطريقة الأولى</u> : من إحدى المعادلات للجملة نعبر عن واحد من المجاهيل بدلالة المجهولين الآخرين ثم نعوض في المعادلتين الأخريين وبالتالي نحصل على جملة معادلتين بمجهولين نستطيع حلها ببساطة .

في الجملة المعطاة : من المعادلة (1) نعبر عن المجهول z بدلالة المجهولين x و y . لدينا : $z = 2x + y - 5$ نعوض في (3) نحصل

على الجملة : $\begin{cases} -3x + 2y = 1 & (4) \\ 8x - y = 6 & (5) \end{cases}$ ومنه بضرب (5) في $(+2)$

نحصل على : $\begin{cases} -3x + 2y = 1 & (4) \\ 16x - 2y = 12 & (6) \end{cases}$ بجمع المعادلتين (4) و (6)

نجد : $13x = 13$ ومنه $x = 1$ وبتعويض في (5) نجد : $y = 2$.

ولدينا : $z = 2x + y - 5 = 2 + 2 - 5 = -1$.

<u>الطريقة الثانية</u> : (طريقة Gauss) .
$$\begin{cases} 2x + y - z = 5 & L_1 \\ -3x + 2y - 1 = 0 & L_2 \\ 4x - 3y + 2z = -4 & L_3 \end{cases}$$

بضرب L_1 في (-2) وبجمع مع L_3 $(L_2 \leftarrow -2L_1 + L_3)$ نجد : $-5y + 4z = -14$ وبضرب L_1 في $(+3)$ و L_2 في $(+2)$ وبجمع المعادلتين $(L_3 \leftarrow 3L_1 + 2L_2)$ نجد : $7y - 3z = 17$ أي نحصل على الجملة الآتية :
$$\begin{cases} 2x + y - z = 5 & L_1 \\ -5y + 4z = -14 & L_2 \\ 7y - 3z = 17 & L_3 \end{cases}$$

بضرب L_2 في $(+7)$ و L_3 في $(+5)$ وبجمع المعادلتين $(L_3 \leftarrow 7L_2 + 5L_3)$ نجد : $13z = -13$ ومنه :

$$(*)\begin{cases} 2x + y - z = 5 & L_1 \\ -5y + 4z = -14 & L_2 \\ 13z = -13 & L_3 \end{cases}$$
من L_3 نستنتج أن $z = -1$

وبتعويض $z = -1$ في L_2 للجملة $(*)$ نجد $y = 2$ وبتعويض قيمتي z و y في L_1 نجد : $x = 1$ ، إذن الحل للجملة المعطاة هو $x = 1 \,,\; y = 2 \,,\; z = -1$.

التفسير الهندسي : معادلات الجملة المعطاة هي تمثل معادلات مستويات والتفسير الهندسي للحل لهذه الجملة هو أن المستويات $(P): 2x + y - z - 5 = 0$ ، $(Q): -3x + 2y - 1 = 0$ ، $(R): 4x - 3y + 2z + 4 = 0$ تتقاطع في النقطة $I(1;2;-1)$.

<u>حل التمرين21</u>

1) $(P)\cap(Q)$ يعني : $\begin{cases} -2x + y - 5z + 5 = 0 \\ 4x + y + 4z - 7 = 0 \end{cases}$

وهذه الجملة تمثل المستقيم (Δ) . لكتابة التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نأخذ z وسيط ونعبر عن x و y بدلالة z أي نحل الجملة الآتية :

$\begin{cases} -2x + y = 5z - 5 \\ 4x + y = -4z + 7 \end{cases}$ ومنه $(*)\begin{cases} -4x + 2y = 10z - 10 \\ 4x + y = -4z + 7 \end{cases}$

وبجمع المعادلتين للجملة $(*)$ نجد : $3y = 6z - 3$ ومنه

$y = 2z - 1$ وبتعويض في المعادلة $-2x + y = 5z - 5$ نجد : $x = -\frac{3}{2}z + 2$. بوضع $z = \lambda$ نحصل على التمثيل الوسيطي لـ (Δ) :

$$(\Delta): \begin{cases} x = -\frac{3}{2}\lambda + 2 \\ y = 2\lambda - 1 \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

2) H المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (Δ) يعني $(BH) \perp (\Delta)$. لدينا $\vec{u}\left(-\frac{3}{2};2;1\right)$ شعاع التوجيه لـ (Δ) و $\overrightarrow{BH}(x_H - 1; y_H; z_H + 1)$. لدينا $\vec{u} \cdot \overrightarrow{BH} = 0$ و $H \in (\Delta)$

ومنه $(*)$ $-\frac{3}{2}(x_H - 1) + 2y_H + z_H + 1 = 0$

و

$$\begin{cases} x_H = -\frac{3}{2}\lambda + 2 \\ y_H = 2\lambda - 1 \\ z_H = \lambda \end{cases}$$

بتعويض x_H, y_H, z_H بدلالة λ في المعادلة $(*)$ نجد :

$$-\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}\lambda + 1\right) + 2(2\lambda - 1) + \lambda + 1 = 0$$

ومنه $\frac{29}{4}\lambda - \frac{5}{2} = 0$ و منه : $\lambda = \frac{10}{29}$. بتعويض λ في

x_H, y_H, z_H نجد : $z_H = \frac{10}{29}$, $y_H = -\frac{9}{29}$, $x_H = \frac{43}{29}$.

المسافة بين النقطة B والمستقيم (Δ) هي BH

$$BH = \sqrt{(x_H - x_B)^2 + (y_H - y_B)^2 + (z_H - z_B)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{14}{29}\right)^2 + \left(-\frac{9}{29}\right)^2 + \left(\frac{39}{29}\right)^2} = \sqrt{\frac{1781}{841}} = \sqrt{\frac{62}{29}}$$

3) المعادلة الديكارتية للمستوي (R) الذي يكون $\vec{u}(-3;4;2)$ شعاع ناظمي له هي من الشكل : $-3x + 4y + 2z + k = 0$

وبما أن (R) يشمل النقطة $A(2;-1;0)$ فإن :

$-3 \times 2 + 4 \times (-1) + 2 \times 0 + k = 0$ ومنه : $k = 10$.

إذن معادلة المستوي (R) هي : $-3x + 4y + 2z + 10 = 0$

4) لدينا التمثيل الوسيطي لـ (Δ) :

$$(\Delta): \begin{cases} x = -\frac{3}{2}\lambda + 2 \\ y = 2\lambda - 1 \\ z = \lambda \end{cases}$$

نلاحظ أن من أجل $\lambda = 0$ لدينا : $x = 2$, $y = -1$, $z = 0$ وهي النقطة $A(2;-1;0)$ ، إذن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ).

حسب السؤال الأول المستويين (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) . النقطة $A(2;-1;0)$ تنتمي إلى (Δ) وإلى المستوي (R)

وهذا يعني أن النقطة A هي مشتركة بين المستويات الثلاثة :
(R) ، (Q) ، (P) ومنه : $(P)\cap(Q)\cap(R)=\{A\}$.

حل التمرين22

1) لدينا : $\overrightarrow{AB}(1;0;2)$ ، $\overrightarrow{AC}(-1;-2;1)$. نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا لأن : $\frac{1}{-1}\neq\frac{0}{-2}$ ومنه النقط A, B, C ليست على استقامة واحدة .

2) لنرمز بـ $\vec{n}(a;b;c)$ ومنه $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ يعني : $a+2c=0$ و $-a-2b+c=0$. نلاحظ أنه يوجد عدد غير منته من الحلول للجملة المكونة من هاتين المعادلتين :

$$\begin{cases} a+2c=0 & (1) \\ -a-2b+c=0 & (2) \end{cases}$$

بأخذ $c=-2$ وبتعويض في (1) نجد $a=+4$ وبتعويض هاتين القيمتين في (2) نجد $b=-3$ ومنه $\vec{n}(4;-3;-2)$.

المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) الذي $\vec{n}$ هو شعاع ناظمي له هي من الشكل : $4x-3y-2z+k=0$ وبما أن المستوي (ABC) يشمل النقطة $B(2;1;0)$ فإن :
$4\times2-3\times1-2\times0+k=0$ ومنه $k=-5$. إذن معادلة المستوي (ABC) هي : $4x-3y-2z-5=0$.

3) لدينا : (P) : $-4x+3y+2z-1=0$ و

(ABC) : $4x-3y-2z-5=0$. نلاحظ أن :
$\frac{4}{-4}=\frac{-3}{3}=\frac{-2}{2}$ ، إذن المستويين (P) و (ABC) هما متوازيان.

4) لدينا $\vec{u}(2;1;3)$ شعاع التوجيه المستقيم (D) و $\vec{v}(-4;3;2)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) . $\vec{u}\cdot\vec{v}=2(-4)+1\times3+3\times2\neq0$.
وهذا يعني أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير متعامدين ومنه المستقيم (D) لا يوازي المستوي (P)، إذن المستقيم (D) يقطع (P). إحداثيات نقطة تقاطع هي الحل للجملة:

$$\begin{cases} x=2\lambda+1 \\ y=\lambda-2 \\ z=3\lambda+1 \end{cases} \quad \text{و} \quad (*) \quad -4x+3y+2z-1=0$$

بتعويض x, y, z بدلالة λ في المعادلة $(*)$ نجد :
$-4(2\lambda+1)+3(\lambda-2)+2(3\lambda+1)-1=0$ وبعد التبسيط نجد : $\lambda=9$. وبتعويض قيمة λ في معادلات التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) نجد : $x=19$ ، $y=7$ ، $z=28$.
إذن $(D)\cap(P)=\{I\}$ حيث : $I(19;7;28)$.

حل التمرين23

1) لدينا : $(D): \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=z-2$ ومنه :
$x-2=2t$ و $y+1=3t$ و $z-2=t$ ومنه :

$$(D):\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1+3t \quad ;t\in\mathbb{R} \\ z=2+t \end{cases}$$

المستقيم (D) موجه بالشعاع $\vec{u}(2;3;1)$. المستقيم (Δ) هو موجه بالشعاع $\vec{v}(3;1;1)$. نلاحظ أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا لأن $\frac{3}{2}\neq\frac{1}{3}$ ، إذن المستقيمان (D) و (Δ) يكونا إما متقاطعان وإما ليس من نفس المستوي . لندرس تقاطع (D) و (Δ)

$(D)\cap(\Delta)$ معناه :

$$\begin{cases} 2+2t=3\lambda-2 \\ -1+3t=\lambda \\ 2+t=\lambda+1 \end{cases}$$

ومنه

$$(*)\begin{cases} 2t-3\lambda=-4 & (1) \\ 3t-\lambda=1 & (2) \\ t-\lambda=-1 & (3) \end{cases}$$

الجملة المكونة من المعادلتين (1) و (2) تقبل الحل $t=1$ و $\lambda=2$

القيمتين $t=1$ و $\lambda=2$ تحققان المعادلة (3) ، إذن الجملة (*) تقبل الحل : $t=1$ و $\lambda=2$. بتعويض $t=1$ في معادلات التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) نجد : $z=3$, $y=2$, $x=4$.

إذن (D) و (Δ) يتقاطعان في نقطة وحيدة $I(4;2;3)$.

2) ليكن H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) ، المسافة AH تمثل بعد النقطة A على المستقيم (D).

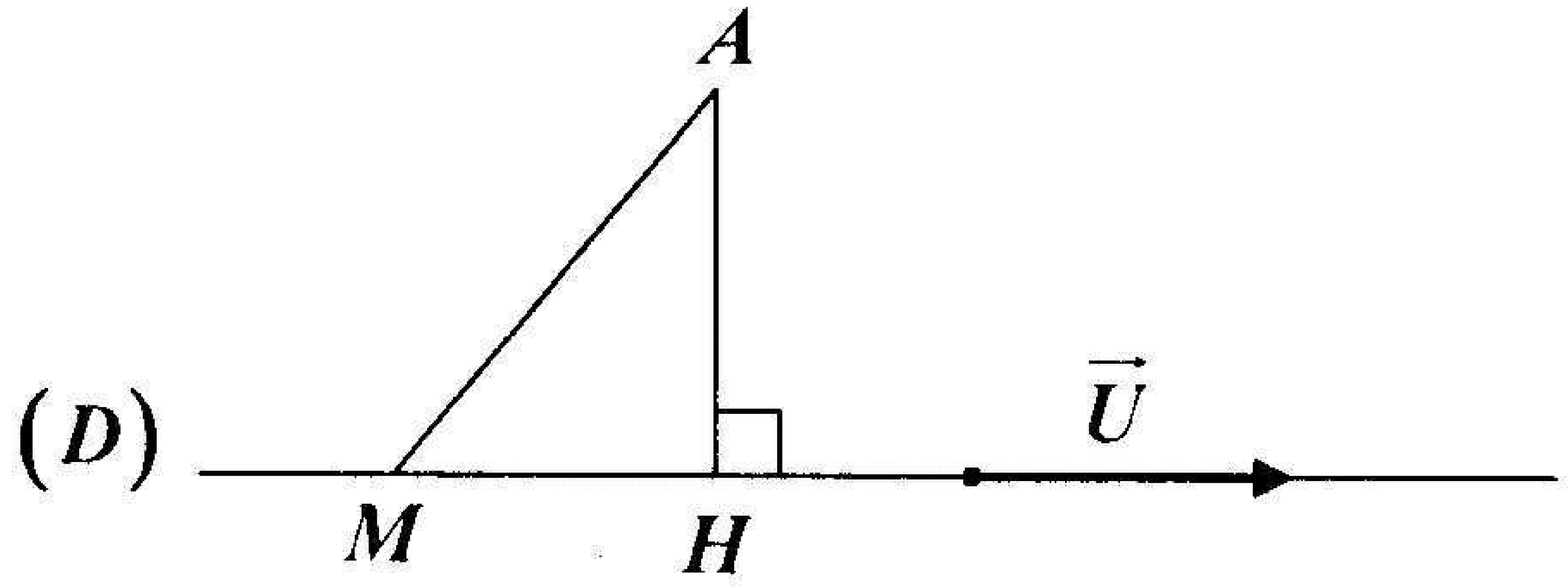
النقطة $M(2;-1;2)$ تنتمي إلى (D) وهي توافق قيمة $t=0$.

لدينا $\vec{u}(2;3;1)$ شعاع التوجيه لـ (D) و $\overrightarrow{AM}(1;0;2)$

لدينا : $|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}|=|2\times1+3\times0+1\times2|=4$.

ونعلم أن : $|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}|=|\vec{u}\cdot\overrightarrow{HM}|=\|\vec{u}\|\cdot HM=\sqrt{14}HM=4$

ومنه $HM=\frac{4}{\sqrt{14}}=\frac{2\sqrt{14}}{7}$ لأن $\|\vec{u}\|=\sqrt{2^2+3^2+1^2}=\sqrt{14}$



المثلث AHM قائم في H وحسب نظرية فيتاغورس فإن : $AH^2=AM^2-HM^2$. نعلم أن :

$AM=\sqrt{1^2+0^2+2^2}=\sqrt{5}$

ومنه : $AH^2=AM^2-HM^2=5-8/7=27/7$.

ومنه $AH=3\sqrt{\frac{3}{7}}$. إذن بعد النقطة A عن (D) هو $3\sqrt{\frac{3}{7}}$

3) $(D)\cap P(O;\vec{i};\vec{j})$ يعني :
$$\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1+3t \\ z=2+t \\ z=0 \end{cases}$$

$z=0$ يكافئ $2+t=0$ ومنه $t=-2$ وبتعويض قيمة t في معادلات التمثيل الوسيطي لـ(D) نجد $z=0$, $y=-7$, $x=-2$

إذن (D) يقطع $P(O;\vec{i};\vec{j})$ في النقطة $I(-2;-7;0)$.

حل التمرين24

1) نلاحظ أنه لا توجد قيمة للعدد الحقيقي m تعدم في آن واحد المعاملات الثلاثة $(2;m;m-1)$ ، إذن مهما تكن قيمة m فإن : $2x+(m-1)y+2mz+m-2=0$ تمثل معادلة مستوي .

2) لدينا : $2x+(m-1)y+2mz+m-2=0$ ومنه : $(*)\ (y+2z+1)m+(-y+2x-2)=0$. نلاحظ أنه إذا كان

$$(e)\ \begin{cases} y+2z+1=0 \\ -y+2x-2=0 \end{cases}$$

، فإن المعادلة $(*)$ تكون دائما محققة مهما تكون قيمة العدد الحقيقي m . ونعلم أن الجملة (e) هي جملة معادلتين ديكارتيتين لمستويين فهي تمثل مستقيم (D).

إذن من أجل كل $m\in\mathbb{R}$ فإن كل المستويات (P_m) تشمل (D) المعرف بـ :

$$\begin{cases} y+2z+1=0 \\ -y+2x-2=0 \end{cases}$$
أو

$$\begin{cases} x=-z+\frac{1}{2} \\ y=-2z-1 \end{cases}$$
بوضع $z=\lambda$ نحصل على التمثيل الوسيطي لـ(D) $(x=-\lambda+\frac{1}{2}$ و $y=-2\lambda-1$ و $z=\lambda)$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$.

بوضع $z=t$ لدينا :
$$\begin{cases} x=-2t+1 \\ y=-t+2 \\ z=t \end{cases}$$
مع $t\in\mathbb{R}$

وهذه الجملة تعبر عن التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) .

3) يكون المستوي (P_m) الذي $\vec{n_m}(2;m-1;2m)$ هو شعاع ناظمي له يوازي المستقيم (Δ) الموجه بالشعاع $\vec{u}(-2;-1;1)$ إذا كان $\vec{n_m}\perp\vec{u}$ أي : $\vec{n_m}\cdot\vec{u}=0$ ومنه $(-2)\times2+(-1)(m-1)+2m=0$ ومنه : $m=3$.

بتعويض $m=3$ في معادلة (P_m) نجد معادلة المستوي المطلوب : $2x+2y+6z+1=0$.

حل التمرين25

1) لدينا $\vec{n_P}(1;2;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) و $\vec{n_Q}(a;b;c)$ شعاع ناظمي للمستوي (Q) و $\vec{u}(2;3;1)$ شعاع التوجيه للمستقيم (D) . $(P)\perp(Q)$ يعني $\vec{n_P}\perp\vec{n_Q}$ ومنه : $\vec{n_P}\cdot\vec{n_Q}=a+2b-c=0$. (Q) يشمل (D) يعني:

(Q) يوازي (D) ويكافئ $\vec{u} \perp \overrightarrow{n_Q}$ ومنه :

إذن لدينا : $\vec{u}\cdot\overrightarrow{n_Q} = 2a+3b+c=0$:

$$\begin{cases} a+2b-c=0 \quad (1) \\ 2a+3b+c=0 \quad (2) \end{cases}$$

هذه الجملة تقبل عدد غير منتهي من الحلول . بجمع المعادلتين (1) و (2) نجد : $3a+5b=0\ (*)$. نأخذ $a=5$ في المعادلة $(*)$ ثم نستنتج قيمة b التي تساوي (-3) وبتعويض a و b في المعادلة (2) نجد : $c=-1$ ومنه $\overrightarrow{n_Q}(5;-3;-1)$.

بأخذ $\lambda=1$ وبتعويض في المعادلات التي تعبر عن التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) نجد : $x=3$, $y=2$, $z=1$ وهي تمثل إحداثيات النقطة $A(3;2;1)$ التي تنتمي إلى (D).

لدينا $A\in(D)$ و (Q) يحتوى (D) ومنه المستوي (Q) يشمل A .

إذن معادلة المستوي (Q) هي معادلة مستوي يشمل $A(3;2;1)$ و $\vec{n}(5;-3;-1)$ شعاع ناظمي له . تكون معادلة المستوي (Q) هي من الشكل : $5x-3y-z+k=0$ وبما أن (Q) يشمل $A(3;2;1)$ فإن : $5\times3-3\times2-1+k=0$ ومنه $k=-8$ وتكون معادلة (Q) هي : $5x-3y-z-8=0$

2) بما أن المستوي (R) يوازي المستوي (P) فيكون $\overrightarrow{n_P}(1;2;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (R) ، وتكون معادلة المستوي (R) هي من الشكل : $x+2y-z+k=0$ وبما أن $B(1;0-1)$

تنتمي إلى المستوي (R) فإن : $1+2\times0+1+k=0$ ومنه $k=-2$ وتكون معادلة المستوي (R) هي : $x+2y-z-2=0$

3) المسافة بين النقطة $B(1;0;-1)$ والمستوي (Q) هي :

$$d(B;(Q))=\frac{|5\times1-3\times0+1-8|}{\sqrt{5^2+3^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{35}} .$$

حل التمرين26

1- أ) لدينا $\overrightarrow{AB}(-3;6;0)$, $\overrightarrow{AC}(-3;0;4)$. نلاحظ ان الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا لأن : $\frac{0}{6}\neq\frac{-3}{-3}$.

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=4(-3)+2\times6+3\times0=0$ ومنه $\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}$

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AC}=4(-3)+2\times0+3\times4=0$ ومنه $\vec{u}\perp\overrightarrow{AC}$.

الشعاع $\vec{u}$ عمودي على الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا من نفس المستوي (ABC) فهو شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

ب) المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي من الشكل : $4x+2y+3z+k=0$ وبما أن المستوي (ABC) يشمل النقطة $A(3;0;0)$ فإن : $4\times3+2\times0+3\times0+k=0$ ، $k=-12$ ، وتكون معادلة المستوي (ABC) هي : $4x+2y+3z-12=0$.

2- أ) المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (ABC) يعني أن

شعاع ناظمي المستوي (ABC) هو شعاع توجيهه .

إذن المستقيم (Δ) يشمل النقطة $D(-5;0;1)$ وموجه بالشعاع $\vec{u}(4;2;3)$. $M(x;y;z)\in(\Delta)$ معناه $\overrightarrow{DM}=\lambda\vec{u}$.

ومنه : $\begin{cases} x+5=4\lambda \\ y=2\lambda \\ z-1=3\lambda \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x=-5+4\lambda \\ y=2\lambda \\ z=1+3\lambda \end{cases}$;$\lambda\in\mathbb{R}$

وهذه الجملة تعبر عن التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) .

ب) النقطة H مسقط النقطة D على المستوي (ABC) هي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستوي (ABC).

$(\Delta)\cap(ABC)=\{H\}$ معناه :

$$\begin{cases} x_H=4\lambda-5 \\ y_H=2\lambda \\ z_H=3\lambda+1 \\ 4x_H+2y_H+3z_H-12=0 \end{cases}$$

وبتعويض x_H , y_H , z_H بدلالة λ في المعادلة الأخيرة للجملة نحصل على : $4(4\lambda-5)+2\times2\lambda+3(3\lambda+1)-12=0$

ومنه $29\lambda-29=0$ ومنه $\lambda=1$. بتعويض قيمة λ في معادلات التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد : $x_H=-1, y_H=2, z_H=4$

ومنه $H(-1;2;4)$.

3- أ) $(ABC)\cap(Ox)$ يعني : $\begin{cases} 4x+2y+3z-12=0 \\ y=z=0 \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} 4x-12=0 \\ y=z=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x=3 \\ y=z=0 \end{cases}$

إذن المستوي (ABC) يقطع (Ox) في النقطة $(3;0;0)$.

$(ABC)\cap(Oy)$ يعني : $\begin{cases} 4x+2y+3z-12=0 \\ x=z=0 \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} 2y-12=0 \\ x=z=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} y=6 \\ x=z=0 \end{cases}$

إذن المستوي (ABC) يقطع (Oy) في النقطة $(0;6;0)$.

ب) $(ABC)\cap(xOy)$ معناه : $\begin{cases} 4x+2y+3z-12=0 \\ z=0 \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} 4x+2y-12=0 \\ z=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 2x+y-6=0 \\ z=0 \end{cases}$

وهذه الجملة لمعادلتين ديكارتيتين تمثل مستقيم (D) يكون تمثيله الوسيطي باعتبار x وسيط $(x=\lambda)$ كما يلي : $\begin{cases} x=\lambda \\ y=-2\lambda+6 \\ z=0 \end{cases}$

إذن المستويين (ABC) و (xOy) يتقاطعان وفق المستقيم (D).

حل التمرين27

1) لدينا $\overrightarrow{AB}(1;-1;1)$. $M(x;y;z)\in(AB)$ معناه وجود عدد حقيقي λ بحيث : $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$ ومنه :

$$\begin{cases} x-1=\lambda \\ y-2=-\lambda \\ z-3=\lambda \end{cases}$$ ومنه : $$\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases} ;\lambda\in\mathbb{R}$$

وهو التمثيل الوسيطي للمستقيم (D).

2) لدينا : $(D):\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases}$ و $(P):\ 3x+y-2z+1=0$:

بتعويض x,y,z بدلالة λ في معادلة المستوي (P) نحصل على : $3(\lambda+1)+(-\lambda+2)-2(\lambda+3)+1=0$ وبعد تبسيط هذه المعادلة نجد : $0=0$ ، إذن مهما تكون قيمة λ فتكون معادلة المستوي (P) محققة وهذا يعني أن جميع نقاط المستقيم (D) هي ضمن المستوي (P) أي أن المستقيم (D) محتوى في (P).

3) (Q) مستوي يشمل النقطة $B(2;1;4)$ و $\vec{v}(1;1;2)$ شعاع ناظمي له . $M(x;y;z)$ نقطة من المستوي (Q) يعني : $\overrightarrow{BM}\perp\vec{v}$ ومنه $\overrightarrow{BM}\cdot\vec{v}=0$ ومنه : $(x-2)+(y-1)+2(z-4)=0$ ومنه $x+y+2z-11=0$ وهي معادلة المستوي (Q).

4) لدينا $\overrightarrow{n_P}(3;1;-2)$ و $\vec{v}(1;1;2)$. نلاحظ أن : $3\times1+1\times1+(-2)\times2=0$ يكافئ $\overrightarrow{n_P}\perp\vec{v}$ ومنه $(P)\perp(Q)$

$(P)\cap(Q)$ يعني : $(*)$ $$(\Delta):\begin{cases} 3x+y-2z+1=0 \\ x+y+2z-11=0 \end{cases}$$

وهذه الجملة تمثل مستقيم (Δ) . لإعطاء التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نأخذ z وسيط ونعبر عن x و y بدلالة z في الجملة $(*)$ أي

نحل الجملة : $$\begin{cases} 3x+y=2z-1 \quad (1) \\ x+y=-2z+11 \quad (2) \end{cases}$$

ومنه بضرب المعادلة (2) في (-1) وبجمع المعادلتين نحصل على

الجملة : $$\begin{cases} 3x+y=2z-1 \quad (1) \\ -x-y=2z-11 \quad (3) \end{cases}$$ وبجمع (1) و (3) نجد:

$2x=4z-12$ ومنه $x=2z-6$ وبتعويض في (2) نجد : $y=-4z+17$. بوضع $z=t$ نجد $$\begin{cases} x=2t-6 \\ y=-4t+17\ ;\ t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

وهذه الجملة تعبر عن التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ).

5) H مسقط النقطة C على المستقيم (Δ) يعني $\overrightarrow{CH}\perp\vec{u}$ حيث $\vec{u}(2;-4;1)$ شعاع التوجيه لـ(Δ) و $\overrightarrow{CH}(x_H-1;y_H;z_H-2)$

ومنه : $\overrightarrow{CH}\cdot\vec{u}=2(x_H-1)-4y_H+(z_H-2)=0$ ومنه : $2x_H-4y_H+z_H-4=0\ (*)$ وبما أن H يتمي إلى (Δ) فإن ($x_H=2t-6$ و $y_H=-4t+17$ و $z_H=t$).

بتعويض x_H ، y_H ، z_H بدلالة t في المعادلة $(*)$ نجد

$2(2t-6)-4(-4t+17)+t-4=0$ ومنه $t=4$.

بتعويض t بقيمتها في معادلات التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد :

$x=2$, $y=1$, $z=4$. إذن $H(2;1;4)$.

$$CH=\sqrt{(x_H-x_C)^2+(y_H-y_C)^2+(z_H-z_C)^2}=\sqrt{6}$$

6- أ) المعادلة الديكارتية للكرة (S) هي :

$(x-2)^2+(y-0)^2+(z-2)^2=2^2$ ومنه :

$x^2+y^2+z^2-2x-4z+1=0$.

ب) المسافة بين $C(1;0;2)$ مركز الكرة (S) والمستوي (Q)

هي : $d(C,(Q))=\dfrac{|1+0+2\times2-11|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$

بما أن $(d>R)$ $\sqrt{6}>2$ ، فالمستوي (Q) لا يقطع الكرة (S) .

حل التمرين28

1) $M(x;y;z)\in(D)$ يعني : $\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}$ ومنه :

$$\begin{cases}x-2=-\lambda\\ y-0=-\lambda\\ z-1=\lambda\end{cases}\quad \text{ومنه}\quad \lambda\in\mathbb{R}\;;\;(D):\begin{cases}x=2-\lambda\\ y=-\lambda\\ z=1+\lambda\end{cases}$$

وهذه الجملة تعبر عن التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) .

2) $M(x;y;z)$ نقطة من الكرة (S) التي قطرها $[AB]$

يعني : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

لدينا $\overrightarrow{MA}(x-2;y;z-1)$ و $\overrightarrow{MB}(x-1;y+1;z-2)$.

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x-2)(x-1)+y(y+1)+(z-1)(z-2)=0$$

وبعد التبسيط نجد : $x^2+y^2+z^2-3x+y-3z+4=0$.

3) إحداثيات ϖ مركز الكرة (S) هي :

$\left(\dfrac{x_A+x_B}{2},\dfrac{y_A+y_B}{2},\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$ أي $\varpi\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

المستوي (R) مماس للكرة (S) عند النقطة A يعني :

$(R)\perp\overrightarrow{\varpi A}$ ، إذن $\overrightarrow{\varpi A}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (R) .

لدينا $\overrightarrow{\varpi A}\left(1/2;1/2;-1/2\right)$ وتكون معادلة (R) هي من الشكل

$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z+k=0$ أو $x+y-z+2k=0$

وبما أن $A(2;0;1)\in(R)$ فإن : $2+0-1+2K=0$ ومنه

$2k=-1$ ، إذن معادلة المستوي (R) هي: $x+y-z-1=0$.

حل التمرين29

1) $$\begin{cases}x=-1+2\lambda\\ y=2-\lambda\\ z=-2+3\lambda\end{cases}\quad \text{ومنه}\quad \begin{cases}\dfrac{x+1}{2}=\lambda\\ 2-y=\lambda\\ \dfrac{z+2}{3}=\lambda\end{cases}$$ ومنه :

$\frac{x+1}{2}=\frac{2-y}{1}=\frac{z+2}{3}$ ومنه :

$\begin{cases} x+1=2(2-y) \\ 3(x+1)=2(z+2) \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x+2y-3=0 \\ 3x-2z-1=0 \end{cases}$

وهذه الجملة الأخيرة تمثل جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (D).

2) $(D)\cap(P)$ يعني : $\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=-2+3\lambda \\ 3x-2y+z-2=0 \ (e) \end{cases}$

ومنه بتعويض z,y,x بدلالة λ في المعادلة الأخيرة (e) للجملة نحصل على : $3(-1+2\lambda)-2(2-\lambda)+(-2+3\lambda)-2=0$

ومنه : $\lambda=1$ وبتعويض قيمة λ في معادلات الجملة نجد : $x=1$, $y=1$, $z=1$. إذن المستقيم (D) يقطع المستوي (P) في النقطة $I(1;1;1)$.

3) لدينا :

$(D):\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=-2+3\lambda \end{cases}$ و $(Q):\ 2x-5y-3z+6=0$

وبتعويض z,y,x بدلالة λ في معادلات المستوي (Q) نجد : $2(-1+2\lambda)-5(2-\lambda)-3(-2+3\lambda)+6=0$ وبعد التبسيط ، المعادلة تكتب $0=0$ وهذا يعني أن جميع نقاط (D) تحقق

معادلة المستوي (Q) ، إذن (D) محتوى في المستوي (Q).

ب) $(P)\cap(Q)=(\Delta)$ يعني : $\begin{cases} 3x-2y+z-2=0 \\ 2x-5y-3z+6=0 \end{cases}$

نأخذ z وسيط ونعبر عن x و y بدلالة z أي نحل الجملة :

$\begin{cases} 3x-2y=-z+2 \quad (*) \\ 2x-5y=3z-6 \quad (\bullet) \end{cases}$ بضرب المعادلة $(*)$ في (-2) والمعادلة $(\bullet)$ في $(+3)$ وبجمع المعادلتين نجد:

$-11y=11z-22$ ومنه : $y=-z+2$ وبالتعويض في المعادلة $(\bullet)$ نجد : $x=-z+2$.إذن التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) هو معرف بـ : $\begin{cases} x=-\lambda+2 \\ y=-\lambda+2 \ ;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$

4) لدينا : $x^2+y^2+z^2-4x=(x-2)^2+y^2+z^2-4=0$

ومنه : $(x-2)^2+y^2+z^2=4=2^2$. إذن مركز الكرة (S) هي النقطة $\varpi(2;0;0)$ ونصف قطرها $R=2$.

المسافة بين $\varpi(2;0;0)$ والمستوي (P) تساوي :

$$d(\varpi;(P))=\frac{|3\times2-0+0-2|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=\frac{2\sqrt{14}}{7}<2 .$$

بما أن $d(\varpi;(P))<2$ فالمستوي (P) يقطع (S) وفق دائرة .

حل التمرين30

1- أ) لدينا $\overrightarrow{AB}(2;1;-1)$ و $\overrightarrow{BC}(-1;-2;-4)$.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2(-1)+1(-2)+(-1)(-4)=0$$

ومنه $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$. ب) المثلث ABC هو قائم B .

جـ) مساحة المثلث ABC تساوي $S=\frac{1}{2}AB\times BC$.

ونعلم أن : $AB=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

$BC=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{21}$. ومنه :

$$S=\frac{1}{2}AB\times BC=\frac{1}{2}\sqrt{6}\times\sqrt{21}=\frac{3\sqrt{14}}{2}\ .$$

2- أ) لنفرض أن $\vec{u}(a;b;c)$ ومنه $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=2a+b-c=0$ و $\vec{u}\cdot\overrightarrow{BC}=-a-2b-4c=0$ وبالتالي لدينا الجملة التالية :

$$\begin{cases}2a+b-c=0 & (1)\\ -a-2b-4c=0 & (2)\end{cases}$$

وهذه الجملة تقبل عدد غير منته من الحلول . بضرب المعادلة (1) في $(+2)$ و بجمع المعادلتين نجد : $3a-6c=0$ أو $a-2c=0$. لنأخذ في هذه المعادلة $a=2$ ومنه $c=1$. وبتعويض قيمتي a و c في المعادلة (1) نجد $b=-3$.

إذن $\vec{u}(2;-3;1)$. الشعاع $\vec{u}$ عمودي على الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ غير مرتبطين خطيا ومن نفس المستوي (ABC) فهو عمودي على

المستوي (ABC). معادلة المستوي (ABC) الذي $\vec{u}(2;-3;1)$ هو شعاع ناظمي له هي من الشكل : $2x-3y+z+k=0$ وبما أن (ABC) يشمل $A(-1;0;1)$ فإن : $2(-1)-3\times0+1+k=0$ ومنه $k=1$. إذن معادلة (ABC) هي $2x-3y+z+1=0$.

جـ) النقطة $D(-1;1;1)$ لا تنتمي إلى المستوي (ABC) لأن : $2(-1)-3\times1+2+1\neq0$. إذن الرباعي $ABCD$ هو رباعي الوجوه . د) المسافة بين النقطة $D(-1;1;1)$ والمستوي (ABC) هي :

$$d=\frac{|2(-1)-3\times1+2+1|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\frac{\sqrt{14}}{7}\ .$$

3) الرباعي الوجوه $ABCD$ هو هرم قاعدته المثلث ABC وارتفاعه $h=\frac{\sqrt{14}}{7}$ فيكون حجمه يساوي : $V=\frac{1}{3}B\cdot h$

حيث B هي مساحة القاعدة (المثلث ABC) ومنه :

$$V=\frac{1}{3}B\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{14}}{2}\times\frac{\sqrt{14}}{7}=1\ .$$

4- أ) تكون معادلة المستوي (BCD) هي : $2x-5y+2z+3=0$ إذا كان إحداثيات النقاط D,C,B تحقق معادلة (BCD) . بما أن $2\times1-5\times1+2\times0+3=0$ فإن $B(1;1;0)$ تنتمي إلى (BCD) .

بما أن $2\times0-5\times(-1)+2\times(-4)+3=0$ فإن $C(0;-1;-4)$

تنتمي إلى (BCD) .

أيضا النقطة $D(-1;1;2)$ تنتمي إلى (BCD) لأن إحداثيات النقطة D تحقق معادلة المستوي (BCD) .

بما أن إحداثيات النقاط D,C,B تحقق المعادلة : $2x-5y+2z+3=0$ فتكون هذه المعادلة هي معادلة (BCD)

ب) المسافة بين النقطة A والمستوي (BCD) هي :

$$d=\frac{|2(-1)-5\times0+2\times1+3|}{\sqrt{2^2+5^2+2^2}}=\frac{\sqrt{33}}{11}$$

ج) إذا اعتبرنا أن القاعدة للرباعي الوجوه $ABCD$ هي المثلث BCD فيكون ارتفاع الرباعي الوجوه هي المسافة بين النقطة A والمستوي (BCD) أي $h=\frac{\sqrt{33}}{11}$. نعلم أن الحجم V للرباعي $ABCD$ هو : $V=\frac{1}{3}B\cdot h$. لدينا $V=1$ (سؤال 3) و $h=\sqrt{33}/11$ و B تمثل مساحة المثلث BCD.

ومنه : $V=\frac{1}{3}\times B\times\frac{\sqrt{33}}{11}=1$ ، $B=\frac{33}{\sqrt{33}}=\sqrt{33}$.

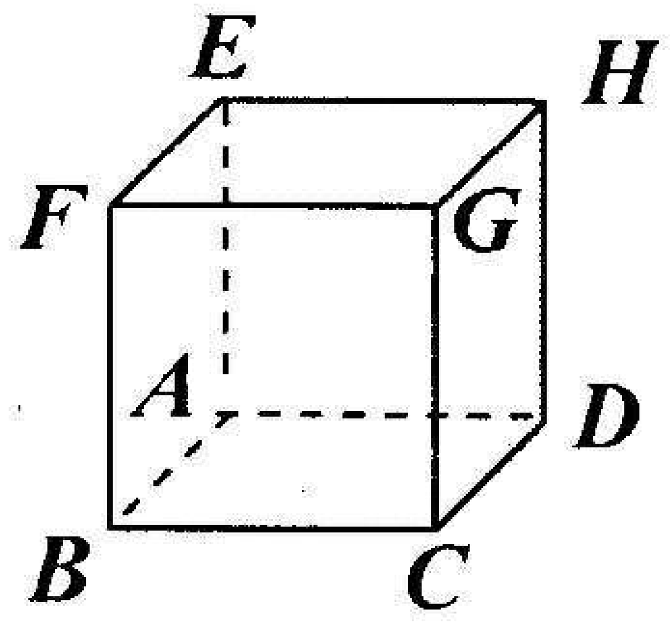
إذن مساحة المثلث BCD هي : $\sqrt{33}$.

حل التمرين31

1) $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$

$D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$

$G(1;1;1)$, $H(0;1;1)$



لدينا $\overrightarrow{AG}(1;1;1),\overrightarrow{BD}(-1;1,0)$. $\overrightarrow{BE}(-1;0;1)$. $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}=1\times(-1)+1\times1+1\times0=0$

. $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}=1\times(-1)+1\times0+1\times1=0$

إذن $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{BE}$. الشعاع $\overrightarrow{AG}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BE}$ غير مرتبطين خطيا وينتميان إلى المستوي (BDE) فهو عمودي على هذا المستوي .

2) معادلة المستوي (BDE) الذي $\overrightarrow{AG}(1;1;1)$ هو شعاع ناظمي له هي من الشكل : $x+y+z+k=0$ وبما أن المستوي (BDE) يشمل $B(1;0;0)$ فإن : $1+0+0+k=0$ ومنه $k=-1$ ، إذن معادلة المستوي (BDE) هي : $x+y+z-1=0$.

3) المسافة بين النقطة $H(0;1,1)$ والمستوي (BDE) هي:

$$d(H;(BDE))=\frac{|0+1+1-1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

4) المستقيم (Δ) يعامد المستوي (BDE) يعني أن $\vec{u}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (BDE) هو شعاع التوجيه المستقيم (Δ) المستقيم (Δ) هو موجه بالشعاع $\vec{u}(1;1;1)$ ويمر بـ $H(0;1,1)$

$M(x;y;z)\in(\Delta)$ يعني وجود عدد حقيقي λ

بحيث : $\overrightarrow{HM}=\lambda\vec{u}$ ومنه $\begin{cases}x=\lambda\\ y-1=\lambda\\ z-1=\lambda\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}x=\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=1+\lambda\end{cases}$

حيث $\lambda\in\mathbb{R}$. وهذه الجملة الأخيرة هي التمثيل الوسيطي لـ(Δ).

حل التمرين32

1) لدينا $\overrightarrow{n_P}(-2;1;5)$ و $\overrightarrow{n_Q}(1;2;0)$.

$\overrightarrow{n_P}\cdot\overrightarrow{n_Q}=1\times(-2)+2\times1+0\times5=0$ ومنه $\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{n_Q}$

إذن المستويين (P) و (Q) متعامدان .

2) معادلة المستوي (P) هي من الشكل : $-2x+y+5z+k=0$

وبما أن $B(1;-2;1)\in(P)$ فإن :

$-2\times1+(-2)+5\times1+k=0$ ومنه $k=-1$ إذن معادلة

المستوي (P) هي : $-2x+y+5z-1=0$.

$(P)\cap(Q)=(D)$ يعني :

$$(D):\begin{cases}-2x+y+5z-1=0 & (1)\\ x+2y-7=0 & (2)\end{cases}$$

بأخذ y كوسيط ($y=\lambda$) ، لدينا من (2)

$x=-2y+7=-2\lambda+7$ وبتعويض في(1)نجد : $z=-\lambda+3$ ،

إذن التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) هو معرف بـ : $\begin{cases}x=-2\lambda+7\\ y=\lambda\\ z=-\lambda+3\end{cases}$

من التمثيل الوسيطي لـ(D)نستنتج أن شعاع التوجيه المستقيم (D)

هو $\overrightarrow{u'}(-2;1;-1)$ أيضا $k\cdot\overrightarrow{u'}$ هو شعاع التوجيه لـ(D) ،إذن

$-\overrightarrow{u'}(2;-1;1)$ هو شعاع التوجيه لـ (D) أي $\vec{u}(2;-1;1)$.

النقطة $C(-1;4;-1)$ هي نقطة من (D) وهي توافق $\lambda=4$.

3) المسافة بين النقطة $A(5;-2;-1)$ والمستوي (P) هي :

$$d(A;(P))=\frac{|-2\times5+(-2)+5(-1)-1|}{\sqrt{(-2)^2+1+5^2}}=\frac{3\sqrt{30}}{5}$$

المسافة بين A والمستوي (Q) هي :

$$d(A;(Q))=\frac{|5-2\times2-7|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

4) بما أن المستويين (P) و (Q) متعامدان فإن حسب نظرية

فيتاغورس : $d^2(A;(D))=d^2(A;(P))+d^2(A;(Q))$

ومنه $d(A;(D))=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{30}}{5}\right)^2+\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

حل التمرين33

1) $\overrightarrow{AC}(1;4;2)$, $\overrightarrow{AB}(-4;-1;7)$. الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه النقاط $C;B;A$ ليست على استقامة واحدة فهي تشكل مستوي (P) . لدينا $(P): 2x-y+z+3=0$

$A(1;2;-3)\in(P)$ لأن : $2-2-3+3=0$.

$B(-3;1;-4)\in(P)$ لأن : $2(-3)-1+4+3=0$

$C(2;6;-1)\in(P)$ لأن : $2\times 2-6+(-1)+3=0$.

إذن معادلة المستوي (P) هي : $2x-y+z+3=0$.

2- المستقيم (D) يمر بالنقطة $\varpi\left(-1;\tfrac{3}{2};\tfrac{1}{2}\right)$ وموجه بالشعاع $\vec{n}(2;-1;1)$ الذي هو شعاع ناظمي للمستوي (P).

$M(x;y;z)\in(D)$ يعني : $\overrightarrow{\varpi M}=\lambda\vec{n}$ ومنه :

($x+1=2\lambda$ و $y-\tfrac{3}{2}=-\lambda$ و $z-\tfrac{1}{2}=\lambda$)

ومنه : ($x=-1+2\lambda$ و $y=\tfrac{3}{2}-\lambda$ و $z=\tfrac{1}{2}+\lambda$)

وهذه المعادلات الثلاثة تشكل التمثيل الوسيطي للمستقيم (D).

3) $MA^2=(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=$

$=x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z+14$

$MB^2=(x+3)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=$

$=x^2+y^2+z^2+6x-2y-8z+26$

$MA^2+MB^2=2x^2+2y^2+2z^2+4x-6y-2z+40$

لدينا $MA^2+MB^2=41$ ومنه :

$2x^2+2y^2+2z^2+4x-6y-2z-1=0$ ومنه :

$x^2+y^2+z^2+2x-3y-z-\tfrac{1}{2}=0$ ومنه :

$$(x+1)^2-1+\left(y-\tfrac{3}{2}\right)^2-\tfrac{9}{4}+\left(z-\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}=0$$

$$(x+1)^2+\left(y-\tfrac{3}{2}\right)^2+\left(z-\tfrac{1}{2}\right)^2=4 \ .$$

هذه المعادلة هي معادلة الكرة (S) التي مركزها $\varpi\left(-1;\tfrac{3}{2};\tfrac{1}{2}\right)$ ونصف قطرها $R=2$. ب) بعد النقطة ϖ عن المستوي (P) هو

$$d(\varpi;(P))=\frac{\left|2\times(-1)-\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}+3\right|}{\sqrt{2^2+1+2^2}}=0 \ .$$

بما أن المسافة بين النقطة ϖ مركز الكرة (S) والمستوي (P) هي تساوي الصفر ، فالمستوي (P) يقطع الكرة (S) وفق الدائرة الكبيرة للكرة (S) أي الدائرة التي مركزها ϖ ونصف قطرها 2 .

حل التمرين34

1) معادلة المستوي (ABC) هي : $x+y-2z+1=0$ (خطأ)

لأن النقطة $A(1;0;-1)$ لا تنتمي إلى هذا المستوي .

2) معادلة المستوي (ABD) هي : $2x-y+z-1=0$ (صحيح)

لأن إحداثيات النقاط C,B,A تحقق المعادلة : $2x-y+z-1=0$

3) $ABCD$ هو رباعي الوجوه لأن النقطة $C(1;-1;1)$ لا تنتمي إلى المستوي (ABD) الذي معادلته $2x-y+z-1=0$.

4) التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) هو : $\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$ (خطأ)

لأن شعاع التوجيه المستقيم (AB) هو $\vec{u}(-1;1;3)$ والتمثيل الوسيطي يعطينا $\vec{u}(-1;1;2)$.

5) المستقيم (AB) محتوى في المستوي ذو المعادلة :

$-x+y+z+2=0$ (خطأ) لأن النقطة $B(0;1;2)$ لا تحقق معادلة المستوي وبالتالي فهي لا تنتمي إليه .

6) المستوي (Q) ذو المعادلة $x+2y-z+1=0$ عمودي على المستوي (P) (خطأ) لأن $\overrightarrow{n_P}(2;-1;1)$ و $\overrightarrow{n_Q}(1;2;-1)$ غير متعامدان . 7) بعد النقطة $A(1;0;-1)$ عن المستوي (P) هو 2 (خطأ) لأن النقطة A تنتمي إلى المستوي (P) (إحداثياتها تحقق معادلة (P)) وبالتالي يكون بعدها عن المستوي (P) هو صفر .

8) المستقيمان (AB) و (BC) متعامدان (خطأ) لأن :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-6\neq 0$ وهذا يعني : (AB) و (BC) غير متعامدان

9) ABD هو مثلث متساوي الساقين (صحيح) لأن :

$AB=BD=\sqrt{5}$.

10) إحداثيات النقطة H مسقط النقطة C على المستوي (ABD) هي $(0;-1;2)$ (خطأ) لأن إحداثيات H لا تحقق معادلة المستوي (ABD) : $2x-y+z-1=0$ وبالتالي فهي لا تنتمي إليه .

حل التمرين35

1- أ) $\overrightarrow{AB}(2;3;2)$. $M(x;y;z)\in(\Delta)$ يعني وجود عدد حقيقي λ بحيث : $\overrightarrow{AM}=\lambda\cdot\overrightarrow{AB}$ ومنه : $\begin{cases} x=8+2\lambda \\ y=3\lambda \\ z=8+2\lambda \end{cases}$

وهو التمثيل الوسيطي لـ (Δ)

ب) المستقيم (D) موجه بالشعاع $\vec{u}(3;2;-2)$ والمستقيم (Δ) بالشعاع $\vec{u'}(2;3;2)$. نلاحظ أن الشعاعين غير مرتبطين خطيا لأن $\frac{3}{2}\neq\frac{2}{3}\neq\frac{-2}{2}$ ، إذن المستقيمان (D) و (Δ) غير متوازيان وبالتالي فهما إما متقاطعان أو ليس من نفس المستوي .

لندرس تقاطع المستقيمين (D) و (Δ) .

$(D)\cap(\Delta)$ معناه : $(*)\begin{cases} -5+3t=2\lambda+8 & (1) \\ 1+2t=3\lambda & (2) \\ -2t=2\lambda+8 & (3) \end{cases}$

الجملة المكونة من المعادلتين (2) و (3) تقبل الحل :

$\lambda = -\frac{7}{5}$ و $t = -\frac{13}{5}$ وهاتين القيمتين لا تحققان المعادلة (1)

ومنه الجملة $(*)$ ليست لها حل ويكون $(D)\cap(\Delta)=\{\ \}$ إذن المستقيمان (D) و (Δ) ليس من نفس المستوي .

2) لدينا $A(8;0;8)$ نقطة من المستقيم (Δ) ، $\vec{u}(3;2;-2)$ شعاع التوجيه (D) و $\vec{v}(2;3;2)$ شعاع التوجيه المستقيم (Δ) .

المستوي (P) يشمل المستقيم (Δ)ويوازي (D) يعني أن المستوي (P) يشمل النقطة A ويوازي كل من الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

نعلم أن معادلة (P) هي من الشكل : $ax+by+cz+d=0$

حيث $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي لـ (P).

المستوي (P) يوازي كل من المستقيمين (D) و (Δ) يعني :

$\vec{n}\perp\vec{u}$ و $\vec{n}\perp\vec{v}$ ومنه $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ و $\vec{n}\cdot\vec{v}=0$ ومنه :

$$\begin{cases} 3a+2b-2c=0 & (1) \\ 2a+3b+2c=0 & (2) \end{cases}$$

ومنه بجمع المعادلتين نحصل على $5a+5b=0$ ومنه $a=-b$ ، وبأخذ $a=2$ فإن $b=-2$

وبالتعويض في المعادلة (1) نجد : $c=1$ ، إذن $\vec{n}(2;-2;1)$.

وتكون معادلة المستوي (P) من الشكل : $2x-2y+z+d=0$.

وبما أن (P) يشمل النقطة $A(8;0;8)$ فإن :

$2\times 8-2\times 0+8+d=0$ ومنه : $d=-24$ ، إذن معادلة المستوي (P) هي : $2x-2y+z-24=0$.

3) لدينا $AM=BM$ ومنه $AM^2=BM^2$ ومنه :

$$AM^2=(x-8)^2+(y-0)^2+(z-8)^2$$

$$BM^2=(x-10)^2+(y-3)^2+(z-10)^2$$

$AM^2=BM^2$ يكافئ :

$$(x-8)^2+y^2+(z-8)^2=(x-10)^2+(y-3)^2+(z-10)^2$$

وبعد النشر وتبسيط المعادلة نجد : $8x+6y+4z-81=0$ وهي معادلة المستوي (Q) .

4 – أ) لدينا معادلة (S) :

$$x^2+y^2+z^2-18x-3y-18z+160=0$$

وهذه المعادلة نستطيع كتابتها على الشكل الآتي :

$$(x-9)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+(z-9)^2=\frac{17}{4}=\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2 .$$

نلاحظ أن (S) هي كرة مركزها $I\left(9;\frac{3}{2};9\right)$ منتصف $[AB]$

ونصف قطرها $R=\frac{\sqrt{17}}{2}$ وقطرها $2R=\sqrt{17}=AB$

ب) المستوي (P) يحتوي (Δ) أي المستقيم (AB) و I مركز الكرة (S) هو منتصف $[AB]$ ، إذن المسافة بين مركز الكرة (S) والمستوي (P) تساوي 0 وهذا يعني أن المستوي (P) يقطع الكرة (S) وفق الدائرة الكبيرة أي الدائرة التي قطرها $[AB]$.

تمارين مقترحة للحل

تمرين01

عين طبيعة المجموعات التالية حيث تمثيلاتها الوسيطية:

$$(E_1)\begin{cases} x=-1+3t \\ y=2-t \\ z=1+t \end{cases} \quad ; \; t\in\mathbb{R}$$

$$(E_2)\begin{cases} x=-1+3t \\ y=2-3t \\ z=2t \end{cases} \quad ; \; t\in[0;1]$$

$$(E_3)\begin{cases} x=-1+t \\ y=2-t \\ z=t \end{cases} \quad ; \; t\in\mathbb{R}^+$$

تمرين02

هل جملة المعادلتين $\begin{cases} x-2y-z=3 \\ 2x-3y+2z=4 \end{cases}$ و التمثيل الوسيطي $\begin{cases} x=1+9t \\ y=-2-4t \\ z=t \end{cases}$ يعرفان نفس المستقيم ؟

تمرين03

نعتبر المستقيمين (D) و (D') المعرفين بالتمثيلين الوسيطيين

$$(D)\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+t \\ z=1+t \end{cases} \quad ; \; t\in\mathbb{R}$$

$$(D')\begin{cases} x=-1+2t' \\ y=-1-t' \\ z=t' \end{cases} \quad ; \; t'\in\mathbb{R}$$

1) بين أن المستقيمين هما من نفس المستوي و عين تقاطعهما.

2) أكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (P) الذي يحويهما.

تمرين04

1)من بين المستويات التالية أذكر المتوازية و المتعامدة.

$(P'): x-2y-z=0$ ، $(P): -x+2y+z-3=0$

$(Q): 2x+3y-4z+2=0$ ، $(Q): -x+2y+z+3=0$

2) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يمثل تقاطع المستويين المتعامدين . 3)احسب المسافة بين النقطة O (مبدأ المعلم) و كل من المستويين المتعامدين ، ثم استنتج المسافة بين النقطة O و (Δ) .

تمرين05

نعتبر (D) الذي تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+2t \\ z=-2 \end{cases} \quad ; \; t\in\mathbb{R}$

1) عين تقاطع المستقيم (D) مع المستوي $(o;\vec{i};\vec{k})$

2) تحقق بأن المستقيم (D) يوازي $(o;\vec{i};\vec{j})$

3) أكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (D') الموازي للمستقيم (D) و يشمل النقطة $A(1;2;0)$

<u>تمرين06</u>

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقطتين $A(-2;-1;1)$ ، $B(2;-1;3)$.

1) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة A و شعاع توجيهه $\vec{U}(2;1;-1)$.

2) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يعامد المستقيم (D) في النقطة A ، ثم احسب المسافة بين النقطة B و المستوي (P) و استنتج المسافة بين النقطة B و المستقيم (D) .

3) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

<u>تمرين07</u>

نعتبر المستقيمين (D) ، (D') . $(D):\begin{cases} x-y=1 \\ 2y+z=3 \end{cases}$

$$(D')\begin{cases} x=t \\ y=3t-2 \\ z=-4t+2 \end{cases} ;\ t\in\mathbb{R}$$

1) عين شعاع توجيه لكل من (D) و (D') ، استنتج شعاع التوجيه $\vec{V}$ للمستقيم (Δ) الذي يعامد كل من (D) و (D').

2) نعتبر المستوي (P_m) المعرف بالمعادلة الديكارتية : $mx+(m+1)y+z+2=0$.

أ) عين قيمة m حتى يكون (P_m) يوازي $\vec{V}$.

ب) عين قيمة m حتى يكون المستوي (P_m) يعامد المستوي ذو المعادلة : $2x+3y+z-1=0$

<u>تمرين08</u>

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر المستقيم (D) المعرف بالمستويين (P) و (P') حيث:

$(P): 2x-3y-2z+4=0$ ، $(P'): x+2y-2z-5=0$

1) برهن بأن المستويين (P) و (P') متعامدان ، ثم استنتج المسافة بين النقطة O (مبدأ المعلم) و المستقيم (D).

2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (R) الموازي للمستقيم (D) و يشمل النقطة $A(1;0;2)$.

3) عين إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (Δ) المعرف بـ: $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=z-1$ مع المستوي (P) .

هل (Δ) يقطع (P')؟ لماذا؟

تمرين09

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبرالنقط $A(3;-2;2)$ ، $B(6;1;5)$ ، $C(6;-2;-1)$ ، $D(0;4;-1)$.

1) بين أن النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة ، ثم أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2) أ - تحقق بأن النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (ABC) .

ب - احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) .

3) احسب حجم الرباعي الوجوه $ABCD$.

تمرين10

نعتبر الكرة (S) ذات المعادلة الديكارتية :

$x^2+y^2+z^2-2x-6y-6z+10=0$ و المستوي (P) ذو المعادلة $2x+y+z-2=0$. 1) عين مركز و نصف قطر (S) .

2) بين أن (S) و (P) متقاطعان.

3) عين مركز و نصف قطر الدائرة التي تمثل تقاطع (S) و (P).

4) عين معادلة ديكارتية للمستوي (R) المماس للكرة (S) في النقطة $B(1;3;0)$.

تمرين 11

نعتبر الكرة (S) ذات المعادلة الديكارتية :

$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-3=0$ و المستوي (P) ذو المعادلة $2x+3y-2z-7=0$.

1) عين المركز ϖ و نصف قطر الكرة (S) .

2) برهن بأن الكرة (S) تمس المستوي (P) في النقطة A يطلب إعطاء إحداثياتها. 3) ليكن المستقيم (D) المار بالنقطتين $A(1;1;-1)$ و $B(-3;-5;-14)$.

أ- تحقق بأن المستوي (P) يشمل المستقيم (D) .

ب – أعط جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (D) ، أدرس وضعية (D) بالنسبة إلى الكرة (S) .

تمرين 12

أكتب معادلة المستوي الذي يحقق الشروط التالية :

1) يمر بالنقطة $A(2;1;1)$ و يعامد المستقيم (D) المعرف بما يلي :

$$\frac{x+3}{2}=\frac{2-y}{4}=z-2 .$$

2) يمر بـ $A(0;2;-1)$ و يعامد كل من المستويين (Q) و (R) حيث

$(Q): x-y+2z-1=0$ و $(R): 2x+y-z+2=0$

تمرين 13

أكتب المعادلات الديكارتية للمستقيم (D) الذي يحقق الشروط التالية:

1) (D) يمر بالنقطة $A(2;-1;3)$ و يعامد المستوي (P) حيث:

$(P): 2x-y+z-1=0$.

2) (D) يمر بالنقطة $A(1;0;-2)$ و يعامد كل من المستقيمين

(D') و (D'') حيث: $(D'): \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{1-z}{2}$

و $(D'')\begin{cases} x=2\lambda-1 \\ y=-3\lambda+1 \quad ;\lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$

<u>تمرين 14</u>

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. لتكن النقطة $A(2;1;-2)$ و المستقيم (Δ) العرف بـ:

$$\begin{cases} x=3-2t \\ y=2-t \quad ;t\in\mathbb{R} \\ z=-1+t \end{cases}$$

1) عين معادلة المستوي (P) الذي يشمل A و يعامد المستقيم (Δ)

2) عين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (Δ)

3) استنتج المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) .

<u>تمرين 15</u>

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقطتين $A(2;-1;1)$ ، $B(1;-1;2)$ و المستقيم (D) المعرف كما يلي:

$$\begin{cases} x=-1+3t \\ y=1+2t \quad ;t\in\mathbb{R} \\ z=2-2t \end{cases}$$

1) أكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطتين A و B.

2) أكتب معادلة المستوي (P) الذي يشمل A والمستقيم (D).

3) أكتب معادلة المستوي (Q) الذي يشمل B ويعامد (D).

<u>تمرين 16</u>

1) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يمر بالنقطة $A(1;0;-1)$ و يعامد المستوي (P) ذو المعادلة الديكارتية $2x-y+3z-1=0$

2) عين المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل (D) و النقطة $B(1;-2;2)$. 3) احسب بعد النقطة B عن المستقيم (D).

4) عين إحداثيات النقطة H نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (D)

<u>تمرين 17</u>

نعتبر المستقيم (D) المعرف بجملة المعادلتين الديكارتيتين :

$$\begin{cases} x+2y-2z-1=0 \\ x+y-3z+1=0 \end{cases}$$

و المستوي (P) ذو المعادلة $2x+y-z-4=0$.

1) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) و عين شعاع توجيهه.

2) بين أن المستقيم (D) يقطع المستوي (P) في نقطة يطلب تعيينها

<u>تمرين 18</u>

نعتبر المستقيم (D) الذي يشمل النقطة $A(1;-2;1)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(-1;-1;1)$. 1) أدرس وضعية المستقيم (D) بالنسبة إلى

المستوي (P) حيث: $(P): -x-y+z-2=0$

2) عين إحداثيات النقطة H مسقط النقطة $B(1;0;-1)$ على المستوي (P) ، ثم استنتج حساب المسافة بين النقطة B و المستقيم (D) .

3) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (R) الذي يشمل B و يعامد (P)

تمرين 19

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط $A(2;4;1)$ ، $B(0;4;-3)$ ، $C(3;1;-3)$ ، $D(1;0;-2)$ ، $E(3;2;-1)$. أذكر إن كانت الإجابة صحيحة أو خاطئة مع التبرير في كل حالة مما يلي :

1) معادلة المستوي (ABC) هي: $2x+2y-z-11=0$.

2) E هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC).

3) المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان.

4) التمثيل الوسيطي للمستقيم (CD) هو: $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=1-t \end{cases}$

5) الشعاع الناظمي للمستوي (ABC) هو $\vec{u}(1;0;-1)$

تمرين 20

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط $A(-1;0;2)$ ، $B(3;2;4)$ ، $C(1;4;2)$ ، $D(5;2;4)$ ،

لتكن I ، K منتصفا $[AB]$ و $[CD]$ على الترتيب و J نقطة تحقق : $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

1) عين إحداثيات النقط I ، K ، J .

2) أ- بين أن النقط I ، K ، J ليست على استقامة واحدة.

ب – تحقق أن معادلة المستوي (IJK) هي: $8x+9y+5z-12=0$.

جـ - عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AD) ثم جد إحداثيات N نقطة تقاطع المستوي (IJK) و المستقيم (AD) .

تمرين 21

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

ليكن (P) المستوي الذي معادلته : $2x+y-2z+4=0$.

نعتبر النقط $A(3;2;6)$ ، $B(1;2;4)$ ، $C(4;-2;5)$.

أ- أثبت أن النقط A ، B ، C تشكل مستويا ، ثم تحقق أن المستوي (ABC) هو المستوي (P).

ب- أثبت أن المثلث ABC قائم. جـ -عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة O و عمودي على المستوي (P) .

د- لتكن النقطة K المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (P).

عين إحداثيات K . 2) عين معادلة ديكارتية للمستوي (R) الذي يوازي (P) و يشمل النقطة $D(1;2;-1)$.

تمرين22

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقطة $N(1;2;-1)$ والمستوي (P) ذو المعادلة الديكارتية: $(P): x+y-3z+4=0$. 1)عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل N و عمودي على المستوي (P) .

2)عين إحداثيات النقطة B نقطة تقاطع المستقيم (D) والمستوي (P)

3) احسب المسافة بين النقطة N و المستوي (P).

تمرين23

لتكن (P) و (P') و (P'') ثلاث مستويات حيث:

$(P): x+y+1=0$ ، $(P'): 2x+y+2z=0$ ،

$(P''): 4x+4y+z+3=0$.

1) حدد الوضعية النسبية للمستويين (P) و (P'').

2) أدرس الوضعية النسبية لمستويين (P) و (P').

3)عين النقطة المشتركة بين المستويات الثلاثة.

4) عين المعادلة الديكارتية للمستوي (R) الذي يعامد كل من المستويين (P) و (P') و يشمل النقطة $A(1;0;-2)$.

تمرين 24

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (P) و (P') مستويين معادلتاهما على الترتيب : $x+y+z=0$ ، $x-y+z-4=0$.

1) أثبت أن المستويين يتقاطعان وفق مستقيم

(D) يطلب إعطاء تمثيله الوسيطي .

2) عين معادلة ديكارتية للمستوي (P'') الذي يشمل النقطة $A(1;1;2)$ و العمودي على المستقيم (D) . 3) عين معادلة ديكارتية للمستوي (R) الذي يعامد (D) و يشمل $B(1;-1;0)$.

تمرين 25

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد فقط صحيح . عين الجواب الصحيح معللا إجابتك .

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

النقطة $A(-1;-3;2)$ و المستقيم (D) الممثل بـ:

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=-3-t \end{cases}$$

و المستوي (P) ذو المعادلة الديكارتية

$$x-2y-3z-1=0$$

1) أ - $E(3;1;-4)$ تنتمي إلى (D) ، ب- $C(2;-1;-1)$ تنتمي إلى (D) ، جـ - $B(-1;3;2)$ تنتمي إلى (D) .

2) شعاع توجيه المستقيم (D) هو:

أ - $\vec{U}(3;1;-4)$ ، ب - $\vec{U}(-2;1;1)$ ، جـ - $\vec{U}(1;2;-3)$

3) أ - $B(1;3;-1)$ تنتمي إلى (P) ، ب- $G(1;3;2)$ تنتمي إلى (P) ، جـ - $E(1;3;-2)$ تنتمي إلى (P) .

4)أ- المستوي (Q_3) ذو المعادلة $-3x+2y-z=1$ يعامد (P) .

ب - المستوي (Q_2) ذو المعادلة $x-3y-2z=3$ يعامد (P) .

جـ - المستوي (Q_1) ذو المعادلة $x+2y-3z=0$ يعامد (P) .

5) المسافة بين النقطة A و المستوي (P) تساوي:

أ- $2\sqrt{3}$ ، ب - 14 ، جـ - $\sqrt{14}$

تمرين 26

نعتبر المستويات (P) و (Q) و (R) حيث:

$(P): 2x-y+3z=2$ ، $(Q): 3x+2y-4z=3$ ،

$(R): 3x-5y+13z=3$. 1) أ- عين شعاع ناظمي لكل مستو .

ب – استنتج أن المستويين (Q) و (R) يتقاطعان وفق مستقيم (D) يطلب تعيين نقطة منه و شعاع توجيهه.

2) بين أن المستوي (P) يشمل (D) ، استنتج حل الجملة :

$$\begin{cases} 2x-y+3z=2 \\ 3x+2y-4z=3 \\ 3x-5y+13z=3 \end{cases}$$

تمرين 27

1) نعتبر المستقيمين (D) و (Δ) في الفضاء حيث:

$$(D): \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+1}{4} \quad \text{و} \quad (\Delta): \begin{cases} x=-2z+1 \\ y=z-2 \end{cases}$$

1) أكتب التمثيل الوسيطي لكل من (D) و (Δ) .

2) أدرس وضعية المستقيمين (D) و (Δ).

3) احسب المسافة بين النقطة $A(-1;0;2)$ و المستقيم (D).

4) أكتب المعادلة الديكارتية للمستوي الذي يوازي المستقيم (D) و يشمل المستقيم (Δ)

تمرين 28

يعطى المستقيمين (D) و (Δ) بتمثيليهما الوسيطيين:

$$(D): \begin{cases} x=2\lambda+1 \\ y=-\lambda+2 \ ;\lambda\in\mathbb{R} \\ z=2\lambda+3 \end{cases} \text{ ، } (\Delta): \begin{cases} x=-t+3 \\ y=3t+1 \ ;t\in\mathbb{R} \\ z=t+5 \end{cases}$$

1) أكتب المستقيم (D) بجملة معادلتين ديكارتيتين .

2) برهن بأن المستقيمين (Δ) و (D) متقاطعان .

3) أكتب معادلة المستوي (P) الذي يشمل (Δ) و (D) .

4) احسب المسافة بين النقطة $A(-1;0;2)$ و المستقيم (D).

تمرين 29

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر المستوي (P) ذو المعادلة الديكارتية :

$(P): 2x+y-2z+1=0$ و النقطة $A(0;-1;1)$.

1) أكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) الذي يناظر المستوي (P) بالنسبة إلى المحور (Ox) . 2) أكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (R) نظير المستوي (P) بالنسبة إلى المستوي (xoy)

3) عين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) ثم احسب المسافة بين A و المستوي (P) .

تمرين 30

1) أكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(1;0;-1)$ و يعامد كل من المستويين :

$(Q): x+2z=3$ ، $(R): 2x+y=2$.

2) بين أن (P) و (R) متقاطعان و عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يمثل تقاطعهما. احسب المسافة بين A و المستقيم (Δ).

تمرين 31

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط

$A(-2;1;1)$ ، $B(2;-1;1)$ ، $C(1;0;-1)$.

1) أكتب معادلة المستوي (P) المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

2) المستقيم (Δ) المار من C و العمودي على المستوي (P) يقطع هذا المستوي في النقطة K . أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) ، ثم استنتج إحداثيات K .

تمرين 32

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر المستقيم (D) المعرف بالمعادلات الديكارتية

$\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{4}$ و النقطة $A(1;0;-2)$.

1)أكتب معادلة المستوي (P) الذي يعامد المستقيم (D) و يشمل A .

2) عين إحداثيات النقطة H ، نقطة تقاطع (P) و (D) .

3) احسب المسافة بين النقطة A و المستقيم (D) .

تمرين 33

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

تعطى النقطة $\varpi(1;2;2)$ و المستوي (P) ذو المعادلة : $x-2y+z-3=0$.

1)اكتب معادلة الكرة (S) التي مركزها ϖ و تمس المستوي (P).

2) عين إحداثيات النقطة A نقطة تماس الكرة (S) و المستوي (P) .

3) (D) مستقيم معرف بـ: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{4}$

أ- بين أن المستقيم (D) يعامد المستوي (P) .

ب – أدرس وضعية المستقيم (D) بالنسبة إلى الكرة (S) .

تمرين 34

1) أعط التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) الذي يشمل $A(1;-1;2)$ و يوازي الشعاع $\vec{u}(2;-2;1)$.

2) $B(1;-1;0)$ نقطة من الفضاء مسقطها على المستقيم (D) هي النقطة H . أ) احسب $|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{U}|$ و $|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}|$ و استنتج AH .

ب) - احسب الطول AB ثم استنتج BH .

3) ليكن المستقيم (Δ) المعرف بتمثيله الوسيطي

$$(\Delta):\begin{cases} x = 1-3\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = 2-\lambda \end{cases}$$

أ – بين أن المستقيمين (D) و (Δ) من نفس المستوي و متقاطعان في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها .

ب – عين المعادلة الديكارتية لـ (P) الذي يعامد كل من (D) و (Δ)

تمرين 35

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط $A(1;2;0)$ ، $B(-1;2;2)$ ، $C(-2;1;0)$.

1) بين أن مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $AM = BM$ هو المستوي (P) ذو المعادلة $-x+z-1=0$.

2)أوجد معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل النقطة C و العمودي على المستوي (P) .

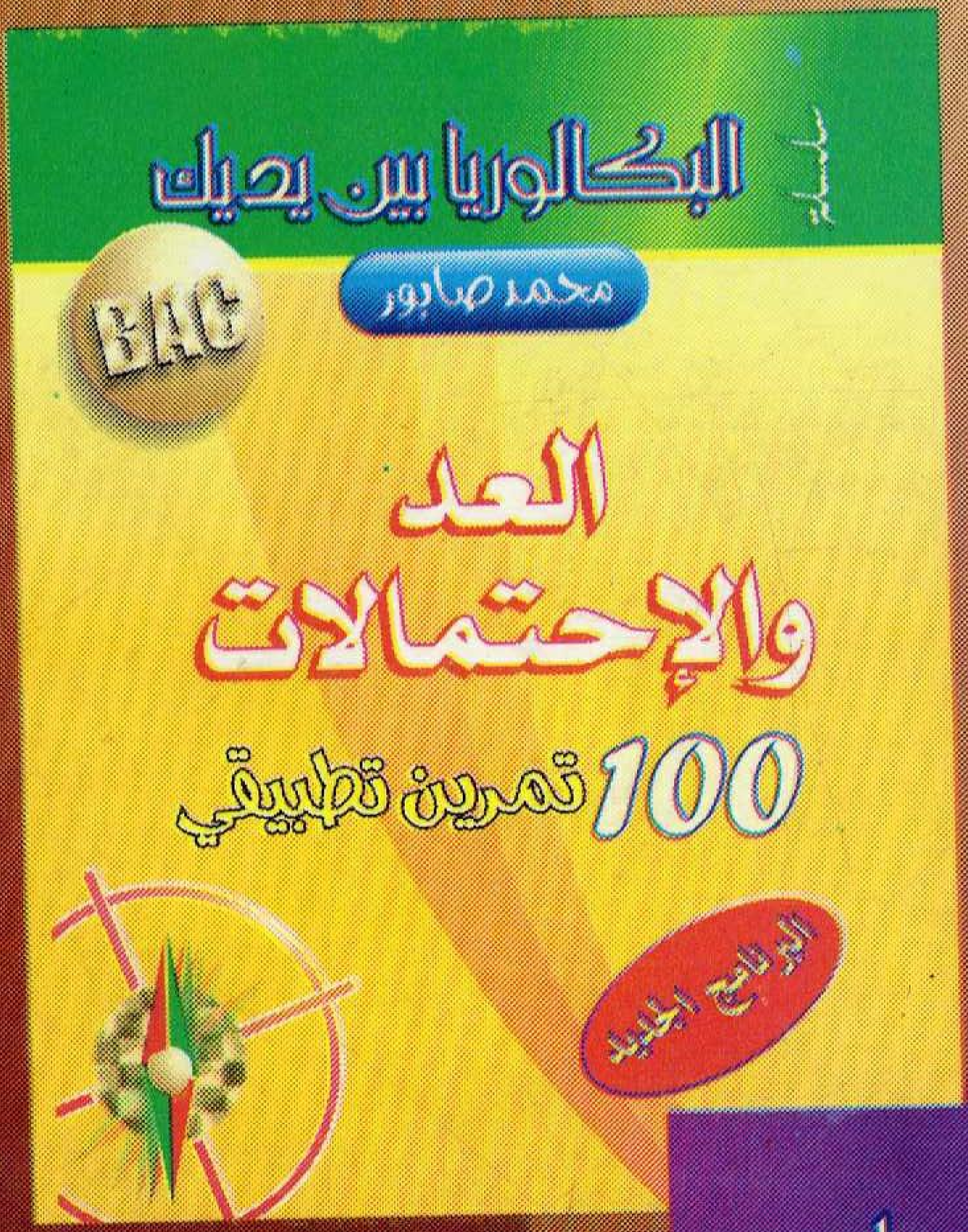
3)ا- أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) المار من C و العمودي على المستوي (P) .

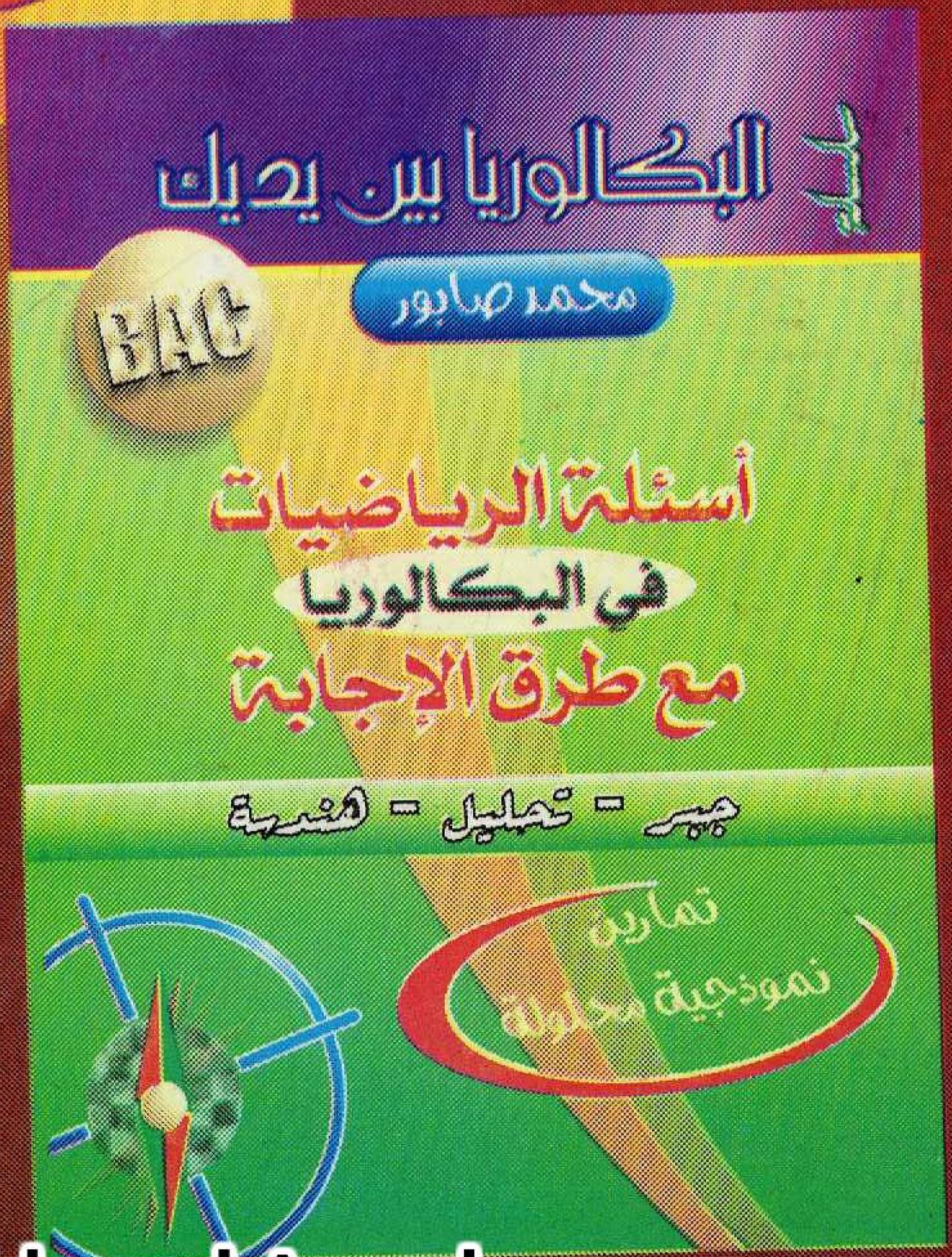
ب – عين إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (D) عن المستوي (P) .

لا تنسونا من صالح دُعائكم

Scanned by: Mekkaoui Ayoub
Email: ayoubsoft2011@hotmail.fr

في نفس السلسلة





978-9947-0-2443-0

Scanned by: Mekkaoui Ayoub
Email: ayoubsoft2011@hotmail.fr